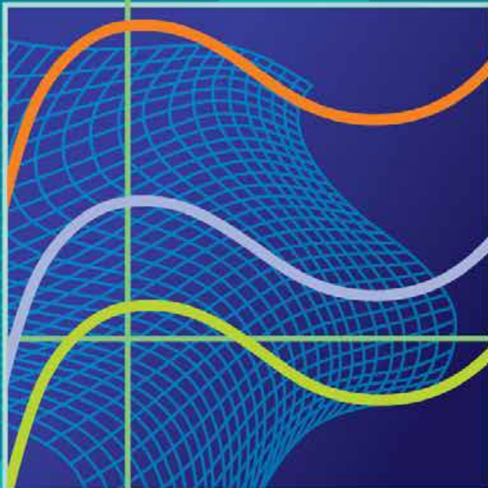
Углублённый уровень

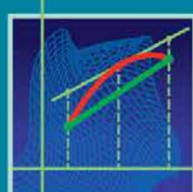
МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА
и начала математического анализа



11

Методическое пособие



вентана граф

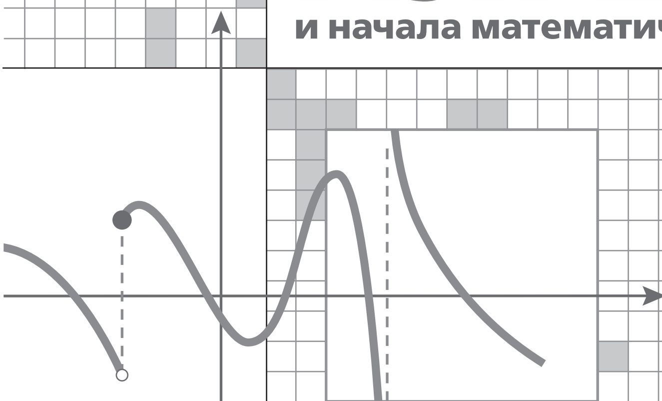
российский учебник

Алгоритм успеха

Е.В. Буцко
А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонский
М.С. Якир

Математика

АЛГЕБРА
и начала математического анализа



11 класс

Методическое пособие

Углублённый уровень

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

УДК 373.5.016:512
ББК 74.262.21
Б94

Буцко, Е. В.

Б94 Математика : алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень : 11 класс : методическое пособие / Е. В. Буцко, А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 143 с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-10609-8

Пособие содержит примерное планирование учебного материала, методические рекомендации к каждому параграфу, комментарии к упражнениям и контрольные работы.

Пособие используется в комплекте с учебником «Математика : алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень. 11 класс» (авт. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков; под ред. В. Е. Подольского).

Пособие соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования.

УДК 373.5.016:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-360-10609-8

От авторов

Данное методическое пособие адресовано учителям, работающим по учебнику «Математика: алгебра и начала математического анализа. 11 класс» авторов А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. М. Полякова под ред. В. Е. Подольского.

Цель пособия — помочь учителю наиболее эффективно организовывать, осуществлять и контролировать учебный процесс на уроках алгебры и начал математического анализа в 11 классе с углублённым изучением математики.

В разделе **«Примерное поурочное планирование»** представлено распределение учебного времени по изучаемым темам с учётом часов, выделенных на контрольные работы.

Раздел **«Организация учебной деятельности»** состоит из технологических карт по каждой теме курса, за исключением контрольных работ. В технологической карте обозначены формируемые и планируемые результаты, основные понятия, изучаемые на уроке, примерные задания для каждого урока данной темы, а также даны методические комментарии к тексту соответствующего параграфа учебника и некоторым упражнениям. Задания для формирования предметных результатов, дополнительные задания, задания для домашней работы указаны из учебника «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» авторов А. Г. Мерзляка и др.; задания для контроля и коррекции предметных результатов указаны из пособия «Самостоятельные и контрольные работы. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» авторов А. Г. Мерзляка и др. Дополнительные задания можно использовать для индивидуальной, парной или групповой работы учащихся, а также во внеурочной деятельности.

Технологические карты являются эффективной помощью учителю при организации учебной деятельности, при этом нужно учитывать, что выполнение объёма заданий на уроке и дома должно корректироваться учителем в зависимости от уровня математической подготовки учащихся.

Раздел **«Контрольные работы»** состоит из шести контрольных работ в соответствии с планированием учебного материала. Каждая работа содержит четыре варианта. Такой обширный материал поможет учителю организовать объективный и эффективный контроль знаний.

В разделе **«Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся»** представлены методы контроля в учебном процессе.

В разделе **«Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся»** предложена технологическая карта урока, на котором используются ИКТ.

В раздел **«Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся»** включены технологические карты организации проведения учебно-исследовательской и проектной деятельности, критерии оценки этой деятельности.

Примерное поурочное планирование учебного материала

(I вариант: 5 часов в неделю, всего 175 часов; II вариант: 4 часа в неделю, всего 140 часов)

Номер параграфа	Номер урока		Содержание учебного материала	Количество часов	
	I вариант	II вариант		I вариант	II вариант
Глава 1. Показательная и логарифмическая функции				**45**	**37**
1	1—5	1—4	Степень с произвольным действительным показателем. Показательная функция	5	4
2	6—10	5—8	Показательные уравнения	5	4
3	11—15	9—12	Показательные неравенства	5	4
	16	13	Контрольная работа № 1	1	1
4	17—22	14—18	Логарифм и его свойства	6	5
5	23—28	19—23	Логарифмическая функция и её свойства	6	5
6	29—35	24—29	Логарифмические уравнения	7	6
7	36—40	30—33	Логарифмические неравенства	5	4
8	41—44	34—36	Производные показательной и логарифмической функций	4	3
	45	37	Контрольная работа № 2	1	1

Окончание

Номер параграфа	**Номер урока**		**Название параграфа**	**Количество часов**	
	I вариант	**II вариант**		**I вариант**	**II вариант**
Глава 2. Интеграл и его применение				**18**	**14**
9	46—49	38—40	Первообразная	4	3
10	50—53	41—43	Правила нахождения первообразной	4	3
11	54—60	44—49	Площадь криволинейной трапеции. Определённый интеграл	7	6
12	61—62	50	Вычисление объёмов тел	2	1
	63	51	Контрольная работа № 3	1	1
Глава 3. Комплексные числа				**17**	**13**
13	64—68	52—55	Множество комплексных чисел	5	4
14	69—72	56—58	Комплексная плоскость. Тригонометрическая форма комплексного числа	4	3
15	73—75	59—60	Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Корень n-й степени из комплексного числа	3	2
16	76—79	61—63	Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел	4	3

	80	64	Контрольная работа № 4	1	1
Глава 4. Элементы теории вероятностей				**33**	**25**
17	81—86	65—69	Элементы комбинаторики и бином Ньютона	6	5
18	87—90	70—72	Аксиомы теории вероятностей	4	3
19	91—94	73—75	Условная вероятность	4	3
20	95—97	76—77	Независимые события	3	2
21	98—100	78—79	Случайная величина	3	2
22	101—104	80—82	Схема Бернулли. Биномиальное распределение	4	3
23	105—108	83—85	Характеристики случайной величины	4	3
24	109—112	86—88	Математическое ожидание суммы случайных величин	4	3
	113	89	Контрольная работа № 5	1	1
Глава 5. Повторение				**13**	**10**
25	114—117	90—92	О появлении посторонних корней и потере решений уравнений	4	3
26	118—122	93—96	Основные методы решения уравнений	5	4
27	123—126	97—99	Основные методы решения неравенств	4	3

Окончание

Номер параграфа	**Номер урока**		**Название параграфа**	**Количество часов**	
	I вариант	**II вариант**		**I вариант**	**II вариант**
Повторение и систематизация учебного материала				**49**	**41**
	128—174	101—139	Повторение и систематизация учебного материала за курс алгебры и начал математического анализа	48	40
	175	140	Итоговая контрольная работа	1	1

Организация учебной деятельности

Глава 1. Показательная и логарифмическая функции

§ 1. Степень с произвольным действительным показателем. Показательная функция

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения оперировать понятием степени с действительным показателем, применять свойства степени с действительным показателем, строить график показательной функции и применять её свойства.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение использовать приобретённые знания в практической деятельности.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием степени с действительным показателем, применять свойства степени с действительным показателем, строить график показательной функции и применять её свойства.

Основные понятия

Степень с действительным показателем, показательная функция, свойства степени с действительным показателем, свойства показательной функции.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	1.1, 1.3, 1.4, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9			1.2, 1.5, 1.10
2	1.11, 1.13, 1.15, 1.17, 1.18, 1.19	1.20		1.12, 1.14, 1.16, 1.21
3	1.22, 1.24, 1.26, 1.27, 1.28, 1.30	1.32, 1.33		1.23, 1.25, 1.29, 1.31, 1.34

Окончание

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
4	1.35, 1.37, 1.39, 1.40, 1.42, 1.44, 1.46	1.48, 1.50, 1.52	Самостоятельная работа № 1: № 1, 2, 3	1.36, 1.38, 1.41, 1.43, 1.45, 1.47, 1.49, 1.51

Методические комментарии

Формальное определение степени с действительным показателем выходит за рамки школьного курса математики. Поэтому для того, чтобы ввести понятие степени с действительным показателем, рассматривается функция, в которой аргументом является показатель степени — рациональное число, а значением функции — заданная аргументом степень некоторого положительного числа a, не равного 1. Если же с помощью предела последовательности ввести понятие степени с показателем, который является иррациональным числом, то эту функцию можно расширить до непрерывной функции, определённой на множестве действительных чисел. Эта функция носит название показательной. Такой подход достаточно естественен. Ведь учащимся интуитивно понятно, что, например, $2^{\sqrt{2}} \approx 2^{1,41}$.

Следует обратить внимание учащихся на то, что для различных значений числа a степень a^x определяют с разными ограничениями. Полезно обобщить информацию об этом в таблице либо иным наглядным способом. Также надо подчеркнуть, что показательной функцией называется только та функция $y = a^x$, где основание a удовлетворяет условиям $a > 0$ и $a \neq 1$. Заметим, что ограничение $a \neq 1$ оправдано. Если $a = 1$, то функция $y = a^x$ становится линейной. Таким образом, одна из линейных функций становится частным случаем показательной функции.

Свойства степени с действительным показателем совпадают со свойствами степени с рациональным показателем, уже известными учащимся.

Свойства показательной функции, рассмотренные в данном параграфе, лежат в основе решения показательных уравнений и неравенств. Поэтому учащиеся должны хорошо их усвоить. Помогут этому схематические графики функции при $a > 1$ и при $0 < a < 1$, изображённые на рисунках 1.2 и 1.3.

Следует рассмотреть с учащимися примеры процессов, для которых показательная функция является математической моделью. Хорошо, если учащиеся самостоятельно приведут примеры помимо тех, которые имеются в учебнике.

Комментарии к упражнениям

№ 1.18. При решении этой задачи учащиеся фактически пользуются тем, что показательная функция является непрерывной.
№ 1.22, 1.23. При решении неравенств следует воспользоваться монотонностью показательной функции.
№ 1.33, 1.40, 1.41. Вначале следует определить, какие значения принимает показатель степени.
№ 1.42, 1.43. Сравните значения, которые принимают левая и правая части уравнений.
№ 1.44, 1.45. Сравните значения, которые принимают левая и правая части неравенств.

§ 2. Показательные уравнения

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения распознавать показательное уравнение, решать показательные уравнения различными методами.

Личностные: формировать умение формулировать собственное мнение.

Метапредметные: формировать умения самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе и познавательной деятельности.

Планируемые результаты

Учащийся научится распознавать показательное уравнение, решать показательные уравнения различными методами.

Основные понятия

Показательное уравнение.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	2.1, 2.3			2.2, 2.4

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
2	2.5, 2.7, 2.9, 2.11, 2.13			2.6, 2.8, 2.10, 2.12, 2.14
3	2.15, 2.17, 2.19, 2.21	2.23		2.16, 2.18, 2.20, 2.22
4	2.24, 2.27, 2.31, 2.33, 2.35	2.25, 2.29, 2.37, 2.39	Самостоятельная работа № 2: № 1, 2, 3	2.26, 2.28, 2.30, 2.32, 2.34, 2.36, 2.38, 2.40

Методические комментарии

Теорема 2.1 и следствие из неё предоставляют удобный математический аппарат для решения показательных уравнений. Следует обратить внимание учащихся на то, что в формулировке теоремы и следствия присутствует ограничение $a > 0$ и $a \neq 1$. Поэтому перед тем, как применять эту теорему для решения задачи, следует убедиться в соблюдении этого ограничения.

Чтобы привести исходное уравнение к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, обычно применяют инструментарий преобразования выражений с использованием свойств степени с действительным показателем. В зависимости от уровня класса при решении нескольких первых упражнений этого параграфа следует комментировать, какие именно свойства степени используются при каждом из преобразований.

В примерах 5 и 6 данного параграфа рассмотрено применение метода замены переменных для показательных уравнений. Следует обратить особое внимание учащихся: если выполняется замена $a^x = t$, то в связи с тем, что область значений показательной функции — положительные числа, в уравнении, полученном в результате такой замены, для неизвестной t возникает ограничение $t > 0$.

Комментарии к упражнениям

№ 2.17, 2.18. Метод решения этих уравнений продемонстрирован в примере 6 параграфа. Следует разъяснить учащимся, что выражения, стоящие в левых частях уравнений, фактически являются однородными многочленами относительно двух выражений вида a^x и b^x.

№ 2.24—2.26. Метод решения этих задач показан в примере 8 параграфа.

№ 2.29. Показательное уравнение $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ имеет два корня. Следовательно для выполнения условия задачи надо потребовать, чтобы уравнение $\sqrt{x} - a = 0$ не давало новых корней или вообще не имело решений.

№ 2.31. Рассмотрите данное уравнение как квадратное относительно 2^x. Затем решите полученную совокупность уравнений.

№ 2.35. Воспользуйтесь тем, что если это уравнение имеет корень x_0, то оно имеет корень $-x_0$.

§ 3. Показательные неравенства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения распознавать показательное неравенство, решать показательные неравенства.

Личностные: формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием.

Метапредметные: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты

Учащийся научится распознавать показательное неравенство, решать показательные неравенства.

Основные понятия

Показательное неравенство.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	3.1, 3.2, 3.4			3.3, 3.5
2	3.6, 3.8, 3.10, 3.12			3.7, 3.9, 3.11, 3.13
3	3.14, 3.16, 3.18, 3.20			3.15, 3.17, 3.19, 3.21

Окончание

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
4	3.22, 3.24, 3.26, 3.28, 3.30, 3.32	3.34	Самостоятельная работа № 3: № 1, 2, 3	3.23, 3.25, 3.27, 3.29, 3.31, 3.33, 3.35

Методические комментарии

Если учащиеся хорошо усвоили материал предыдущего параграфа, то переход к решению показательных неравенств не покажется им сложным. Теорему 3.1 и следствие из неё они будут вполне логично рассматривать как аналог теоремы 2.1 и следствия из неё. Однако следует обратить внимание на то, что для решения уравнений было достаточно того, что показательная функция каждое своё значение принимает только один раз (и не имело значения, убывающая она или возрастающая). Для решения неравенств характер монотонности функции важен. Поэтому в теореме 3.1 рассматриваются два отдельных случая: если рассматриваемая функция возрастающая (т. е. случай, когда $a > 1$) и если рассматриваемая функция убывающая (т. е. случай, когда $0 < a < 1$). Если учащиеся хорошо поймут это, то решение показательных неравенств не будет представлять для них трудностей. Для лучшего осознания и запоминания теоремы 3.1 учащиеся могут пользоваться схематическими графиками показательной функции при $a > 1$ и при $0 < a < 1$, изображёнными на рисунках 1.2 и 1.3.

Комментарии к упражнениям

№ 3.22, 3.23. Метод решения этих неравенств продемонстрирован в примере 5 параграфа. Следует разъяснить учащимся, что выражения, стоящие в левых частях неравенств, фактически являются однородными многочленами относительно двух выражений вида a^x и b^x.
№ 3.28. Очевидно, что никакое неположительное число не является решением данного неравенства. Рассмотрим функцию $f(x) = 5^x + x$. Она является возрастающей на $(0; \infty)$, причём $f(1) = 6$. Следовательно, $f(x) > 6$, если $x > 1$.

№ 3.34. Задача сводится к тому, чтобы найти все значения параметра a, при которых неравенство $t^2 - 2(a - 3) \cdot t + a + 3 > 0$ выполняется при всех x из промежутка $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Контрольная работа № 1

§ 4. Логарифм и его свойства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения оперировать понятием логарифма, доказывать и применять свойства логарифма.

Личностные: формировать умение представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: формировать умения устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием логарифма, доказывать и применять свойства логарифма.

Основные понятия

Логарифм, основное логарифмическое тождество, логарифмирование числа, десятичный логарифм, свойства логарифма.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	4.1, 4.2, 4.4, 4.6, 4.7			4.3, 4.5, 4.8
2	4.9, 4.11, 4.13, 4.15, 4.17, 4.19			4.10, 4.12, 4.14, 4.16, 4.18, 4.20
3	4.21, 4.23, 4.25, 4.27, 4.31	4.29, 4.33		4.22, 4.24, 4.26, 4.28, 4.30, 4.32

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
4	4.35, 4.37, 4.38, 4.41	4.39		4.34, 4.36, 4.40, 4.42
5	4.43, 4.45, 4.46, 4.48	4.50	Самостоятельная работа № 4: № 1, 2, 3	4.44, 4.47, 4.49, 4.51

Методические комментарии

Понятие логарифма вводится в учебнике аналогично тому, как в своё время было введено понятие корня: исходя из необходимости уметь решать уравнение $a^x = b$. В зависимости от уровня класса можно разъяснить учащимся, что факт существования корня уравнения $a^x = b$ основан на том, что показательная функция является непрерывной.

Благодаря тому, что показательная функция является обратимой, логарифм любого положительного числа по данному основанию можно определить однозначно.

Также можно обсудить с учащимися взаимосвязь операций возведения в степень, извлечения корня и логарифмирования следующим образом.

Учащиеся знают, что для операции сложения неизвестный компонент этой операции находится с помощью операции вычитания; для операции умножения — с помощью операции деления. Операции сложения и умножения обладают переместительным свойством, т. е. слагаемые и множители «равноправны». Таким образом, для операции сложения обратной является операция вычитания, для умножения — деление.

В операции возведения в степень компоненты «неравноправны»: $a^b \neq b^a$. Поэтому для нахождения неизвестных компонентов операции возведения в степень существуют две отдельные обратные операции: для нахождения основания степени при известном показателе — извлечение корня, для нахождения показателя степени при известном основании — логарифмирование.

Поскольку в выражении $\log_a b$ для основания логарифма a и для числа b существуют ограничения $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то следует обращать особое внимание на соблюдение этих ограничений при преобразовании выражений, содержащих логарифмы. Например, если переменные x и y принимают отрицательные значения, то выражение $\log_2 xy$ имеет смысл, а $\log_2 x + \log_2 y$ — нет. Следует добиться от учащихся понимания этих особенностей работы с логарифмами. Можно привести аналог, рассмотрев выражение $\sqrt{(-2)\cdot(-8)}$.

Определение логарифма, основное логарифмическое тождество и свойства логарифма, рассмотренные в данном параграфе, являются основой для решения целого класса задач. Поэтому учащиеся должны их хорошо знать.

Для повышения интереса к предмету и пояснения ценности инструментария, который предоставляют логарифмы, можно рассказать учащимся о том, что свойства логарифмов позволяют при вычислениях заменять более сложную операцию более простой: умножение чисел — сложением их логарифмов, возведение в степень — умножением. До появления компьютерной техники эти свойства широко использовались для оптимизации и механизации вычислений. Этот рассказ следует проиллюстрировать таблицами (например, таблицы Брадиса) и логарифмической линейкой, продемонстрировав, как с их помощью выполняли некоторые действия.

Комментарии к упражнениям

№ 4.41, 4.42. Эти задачи основаны на одном приёме: упростить выражение, содержащее логарифмы, в результате чего получается функция, график которой построить несложно. Следует обратить внимание учащихся на то, что поскольку функция содержит логарифмы, то надо найти область определения исходной функции, учитывая ограничения, накладываемые в выражении $\log_a b$ для основания логарифма a и для числа b. Функции в этих задачах подобраны таким образом, что после записи упомянутых ограничений, нахождении области определения и упрощения выражения, которым задана функция, построение графика уже сложностей не вызывает. Важно сравнить области определения исходной функции и функции, которая получается в результате преобразований.

§ 5. Логарифмическая функция и её свойства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения распознавать логарифмическую функцию, использовать её свойства.

	Личностные: развивать познавательный интерес к математике.
	Метапредметные: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится распознавать логарифмическую функцию, использовать её свойства.
Основные понятия	Логарифмическая функция, свойства логарифмической функции.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.7			5.4, 5.6, 5.8
2	5.9, 5.11, 5.13, 5.15			5.10, 5.12, 5.14, 5.16
3	5.17, 5.19, 5.21, 5.23			5.18, 5.20, 5.22, 5.24
4	5.25, 5.27, 5.29, 5.31, 5.33	5.35		5.26, 5.28, 5.30, 5.32, 5.34, 5.36
5	5.37, 5.39, 5.41, 5.43		Самостоятельная работа № 5: № 1, 2, 3	5.38, 5.40, 5.42

Методические комментарии

Можно выделить два подхода к введению логарифмической функции. Первый подход — определить логарифмическую функцию как обратную к показательной, а затем выявлять свойства логарифмической функции за счёт свойств взаимно обратных функций. Второй подход — это определить логарифмическую функцию как правило, которое каждому положительному числу ставит в соответствие его логарифм по заданному основанию, а затем выявлять свойства логарифмической функции за счёт свойств логарифмов. Первый подход достаточно формальный и плохо воспринимается учащимися. Поэтому в учебнике рассматривается второй подход.

Тот факт, что показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, тоже используется в параграфе, например для построения эскиза графика логарифмической функции. Выявив ход графика, можно из соображений наглядности определять свойства логарифмической функции.

В дальнейшем при решении логарифмических уравнений и неравенств учащиеся должны обращать внимание на область определения логарифмической функции. Показательным в этом отношении является пример 2 данного параграфа.

Комментарии к упражнениям

№ 5.35 (1, 2). Желательно перед решением этих задач повторить правила построения графиков функций вида $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$.
№ 5.41. Задача сводится к тому, чтобы выяснить, при каких значениях параметра a наибольшее значение функция $f(x) = 9t^2 - 30t + 61 - 9a^2$ на отрезке $[2;16]$ является положительным числом.

§ 6. Логарифмические уравнения

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения распознавать логарифмическое уравнение, решать логарифмические уравнения различными методами. ***Личностные***: развивать навыки самостоятельной работы, анализа своей работы. ***Метапредметные***: формировать умения классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.
Планируемые результаты	Учащийся научится распознавать логарифмическое уравнение, решать логарифмические уравнения различными методами.
Основные понятия	Простейшее логарифмическое уравнение.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	6.1, 6.3, 6.5			6.2, 6.4, 6.6,
2	6.7, 6.9, 6.11			6.8, 6.10, 6.12
3	6.13, 6.15, 6.17, 6.19			6.14, 6.16, 6.18, 6.20
4	6.21, 6.23, 6.25, 6.27, 6.30, 6.31	6.28		6.22, 6.24, 6.26, 6.29, 6.32
5	6.33, 6.37, 6.39,	6.35, 6.41		6.34, 6.36, 6.38, 6.40
6	6.42, 6.44, 6.46, 6.48	6.50, 6.52	Самостоятельная работа № 6: № 1, 2, 3	6.43, 6.45, 6.47, 6.49, 6.51

Методические комментарии

Материал этого параграфа во многом аналогичен материалу темы «Показательные уравнения» (§ 2). И это не удивительно, поскольку обе эти темы рассматривают решение уравнений, в которых требуется переход от уравнения, связывающего значения обратимых функций, к уравнению, связывающему значения их аргументов. Поэтому для учащихся, которые хорошо усвоили принципы решения показательных уравнений, эта тема будет несложной для восприятия.

Чтобы привести исходное уравнение к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, обычно применяется инструментарий преобразования выражений с использованием свойств логарифмов. Принципиальной особенностью этих преобразований является то, что наличие в уравнении выражений с логарифмом накладывает ограничение на область определения уравнения. Поэтому, проводя преобразования и далее «избавляясь» от логарифма, легко изменить область определения уравнения, а как следствие этого, допустить ошибки. Поэтому учащиеся должны учитывать две основные особенности решения логарифмических уравнений:

1) Заботиться о соблюдении равносильности при преобразовании выражений, содержащих логарифмы. В этом плане особое значение имеет пример 3, рассмотренный в параграфе. На этом примере следует разобрать с учащимися причину появления посторонних корней.

2) Для того чтобы вместо логарифмического уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ решать уравнение, не содержащее логарифмы, надо выполнить равносильный переход к системе (см. следствие из теоремы 6.1), которая за счёт содержащегося в ней неравенства учитывает область определения исходного уравнения.

В примере 8 параграфа анализируется распространённая ошибка: переход от уравнения вида $f(x) \cdot g(x) = 0$ к совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$ без учёта множества $D(f) \cap D(g)$.

Комментарии к упражнениям

№ 6.9, 6.10. При оформлении решения уравнений следует воспользоваться методом, описанным в примере 2 параграфа.

№ 6.13, 6.14. В ходе преобразования уравнений расширяется их область определения, что может привести к приобретению посторонних корней.

№ 6.21, 6.22. Применение формулы вида $\lg x^{2n} = 2n \lg x$ приводит к сужению области определения уравнения, и, как следствие, может привести к потере корней. Следует использовать такую формулу $\lg x^{2n} = 2n \lg |x|$.

№ 6.31, 6.32. Воспользуйтесь равенством из задачи 6.30.

№ 6.48. Докажите, что левая часть данного уравнения не превосходит 1 и принимает это значение только при $x = 2$.

§ 7. Логарифмические неравенства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения распознавать логарифмическое неравенство, решать логарифмические неравенства. ***Личностные***: развивать познавательный интерес к математике. ***Метапредметные***: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится распознавать логарифмическое неравенство, решать логарифмические неравенства.
Основные понятия	Логарифмическое неравенство.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	7.1, 7.3, 7.5			7.2, 7.4, 7.6
2	7.7, 7.9, 7.11, 7.13			7.8, 7.10, 7.12 , 7.14
3	7.15, 7.17, 7.19, 7.21, 7.23			7.16, 7.18, 7.20, 7.22, 7.24
4	7.25, 7.27, 7.29, 7.31	7.33	Самостоятельная работа № 7: № 1, 2, 3	7.26, 7.28, 7.30, 7.32, 7.34

Методические комментарии

Основные идеи, необходимые учащимся для решения логарифмических неравенств, уже известны из тем «Логарифмические уравнения» и «Показательные неравенства». Поэтому применение теоремы 7.1 и следствия из неё не вызывает у учащихся затруднений. Разбирая с учащимися следствие, надо обратить внимание на то, что в первой системе неравенство $f(x) > 0$ и во второй системе неравенство $g(x) > 0$ будут являться избыточными условиями.

Главным источником ошибок при решении логарифмических неравенств является то, что учащиеся забывают характере монотонности логарифмической функции при $a > 1$ и при $0 < a < 1$, и вследствие этого забывают «поменять знак неравенства» при работе с убывающей функцией.

В примерах параграфа разобраны решения основных типов логарифмических неравенств.

Примеры более сложных уравнений и неравенств по всей теме «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» приведены в дополнительном рассказе после этой главы.

Комментарии к упражнениям

№ 7.19 (1, 2). Преобразуйте первое слагаемое, стоящее в левой части неравенства, а далее воспользуйтесь методом замены переменной.
№ 7.23, 7.24. Оформление решения этих неравенств показано в примере 6 параграфа.

№ 7.27, 7.28. Для того чтобы не потерять решения, можно отдельно решить уравнение и объединить полученные корни с решениями неравенства. Также можно решить данные неравенства методом интервалов.

§ 8. Производные показательной и логарифмической функций

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения оперировать понятием натурального логарифма, находить производную показательной, логарифмической и степенной функций.

Личностные: формировать умение работать в коллективе и находить согласованные решения.

Метапредметные: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием натурального логарифма, находить производную показательной, логарифмической и степенной функций.

Основные понятия

Экспонента, натуральный логарифм, производная показательной функции, производная логарифмической функции, производная степенной функции.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	8.1, 8.3, 8.5			8.2, 8.4, 8.6
2	8.7, 8.9, 8.11, 8.13, 8.15, 8.17			8.8, 8.10, 8.12, 8.14, 8.16 , 8.18
3	8.19, 8.21, 8.23, 8.25	8.27	Самостоятельная работа № 8: № 1, 2, 3	8.20, 8.22, 8.24, 8.26, 8.28

Методические комментарии

Отдельное рассмотрение функции $f(x) = e^x$, скорее всего, покажется учащимся надуманным шагом, поскольку у них отсутствует какое-либо наглядное представление о процессах окружающего мира, которые могла бы описывать эта функция. Эту ситуацию следует воспринимать как объективную. Поэтому первую часть параграфа, в которой вводятся понятия экспоненты и натурального логарифма, надо преподнести учащимся как данное, и затем сконцентрировать внимание на тех свойствах экспоненты и натурального логарифма и производных этих функций, которые рассмотрены в параграфе далее и предоставляют новый математический аппарат для преобразования выражений. В частности, подчеркнуть, что с помощью понятия натурального логарифма легко находить производные любой показательной и логарифмической функции.

Возможно, обращение к рисунку 8.1 может сделать материал менее формальным, поскольку этот рисунок показывает, что существует график показательной функции, касательная к которому в точке с абсциссой 0 образует угол 45°.

Примеры, разобранные в параграфе, подобраны так, что они повторяют все основные задачи на применение производной, изученные в 10 классе.

Комментарии к упражнениям

№ 8.17 (10—18). При исследовании знака производной следует учитывать область определения исходной функции.

№ 8.27. Следует свести исследование данной функции к исследованию квадратичной функции на промежутке $(0; \infty)$.

Контрольная работа № 2

Глава 2. Интеграл и его применение

§ 9. Первообразная

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: сформировать представление учащихся об интегрировании, как об операции, обратной дифференцированию; формировать умения оперировать понятиями первообразной функции, неопределённого интеграла, доказывать и использовать основное свойство первообразной, находить первообразные функций.

Личностные: формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики.

Метапредметные: формировать умения определять понятия, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями первообразной функции, неопределённого интеграла, доказывать и использовать основное свойство первообразной, находить первообразные функций.

Основные понятия

Интегрирование, первообразная функции, основное свойство первообразной, общий вид первообразной, неопределённый интеграл.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	9.1, 9.3, 9.4			9.2, 9.5
2	9.6, 9.8, 9.10, 9.12, 9.14			9.7, 9.9, 9.11, 9.13
3	9.15, 9.17, 9.19, 9.20		Самостоятельная работа № 9: № 1, 2, 3	9.16, 9.18

Методические комментарии

В этом параграфе вводятся понятия первообразной функции и интегрирования как операции, обратной дифференцированию.

После определения первообразной приведён ряд примеров, в которых рассматриваются некоторая функция и её первообразная и демонстрируется, что производная от первообразной действительно является данной функцией. В примерах важно рассмотреть области определения самой функции и её первообразной и сделать вывод о важности слов «на промежутке» в определении первообразной. Следует подчеркнуть, что слова «на промежутке» можно опускать в том случае, когда рассматриваемым промежутком является всё множество действительных чисел, т. е. промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Перед рассмотрением основного свойства первообразной надо повторить с учащимися свойства дифференцирования.

В параграфе приведена таблица первообразных. Если учащиеся знают, что для функции f производной является функция g, то в таблицу можно занести функцию g и её первообразную — функцию f. Для некоторых из функций в примерах этого параграфа приведено доказательство, основанное на этой взаимосвязи между функцией и первообразной.

Пример 3 рассматривает типовую задачу темы: нахождение первообразной, которая удовлетворяет некоторому условию (простейшее из условий — график проходит через заданную точку). Здесь следует напомнить учащимся, что параллельный перенос графика функции вдоль оси ординат является результатом прибавления некоторой константы к правой части формулы, которой задана функция. Следовательно, схема решения этой задачи состоит в том, чтобы найти множество первообразных для заданной функции, а затем найти ту, график которой проходит через заданную точку.

Следует обратить внимание на то, что когда мы говорим «множество первообразных имеет вид...», то константа C является любым числом. Если же указано, что «искомая первообразная имеет вид», то константа C является некоторым конкретным числом.

Комментарии к упражнениям

№ 9.10 (3). Искомая первообразная имеет вид $\ln(-x) + C$, где C — некоторое число.

№ 9.12, 9.13. Заданная функция является константой.

№ 9.20. Учащиеся должны понимать, почему условие этой задачи принципиально отличается от, казалось бы, аналогичной задачи 9.19.

§ 10. Правила нахождения первообразной

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения доказывать и применять правила нахождения первообразной. ***Личностные***: формировать способность осознанного выбора и построения дальнейшей индивидуальной траектории. ***Метапредметные***: формировать умения устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится доказывать и применять правила нахождения первообразной.
Основные понятия	Правила нахождения первообразной.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополни-тельные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	10.1, 10.3			10.2, 10.4
2	10.5, 10.7, 10.9, 10.11			10.6, 10.8, 10.10, 10.12
3	10.13, 10.15, 10.17, 10.19, 10.21		Самостоятельная работа № 10: № 1, 2, 3	10.14, 10.16, 10.18, 10.20

Методические комментарии

В параграфе приведён и доказан ряд теорем, которые позволяют находить первообразные. Эти теоремы существенно расширяют класс функций, первообразные которых можно найти.

Следует напомнить учащимся, что производная суммы равна сумме производных, поэтому существует аналогичное правило нахождения первообразной суммы. Однако для производной произведения и производной частного формулы гораздо сложнее. Поэтому, к сожалению, не существует общих формул для нахождения первообразной произведения функций и частного функций. Если подынтегральное выражение достаточно сложно, то единственным способом нахождения первообразной в рамках школьного курса является попытка привести его либо к сумме функций, первообразные каждой из которых учащимся известны, либо к виду, который позволяет применить теоремы 10.2 или 10.3. Следует особо подчеркнуть, что теорема 10.3 позволяет находить первообразные лишь тех сложных функций, «внутренние» функции которых являются линейными.

Комментарии к упражнениям

№ 10.15 (1). Примените формулу понижения степени для синуса.
№ 10.15 (2, 3). Примените формулы преобразования произведения тригонометрических формул в сумму.
№ 10.21. Ошибка заключается в том, что правило интегрирования сложных функций (теорема 10.3) работает лишь в том случае, когда внутренняя функция является линейной.

§ 11. Площадь криволинейной трапеции. Определённый интеграл

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения оперировать понятиями криволинейной трапеции и определённого интеграла, доказывать формулу для вычисления площади криволинейной трапеции, вычислять площадь криволинейной трапеции, доказывать и применять свойства определённого интеграла. ***Личностные***: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные***: формировать представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями криволинейной трапеции и определённого интеграла, доказывать формулу для вычисления площади криволинейной трапеции, вычислять площадь криволинейной трапеции, доказывать и применять свойства определённого интеграла.

Основные понятия	Криволинейная трапеция, площадь криволинейной трапеции, определённый интеграл, формула Ньютона — Лейбница, свойства определённого интеграла.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	11.1, 11.3			11.2, 11.4
2	11.5, 11.7, 11.8			11.6, 11.9
3	11.10, 11.12, 11.15	11.13		11.11, 11.14, 11.16
4	11.17, 11.19, 11.21			11.18, 11.20, 11.22
5	11.23, 11.25, 11.27			11.24, 11.26, 11.28
6	11.29, 11.31, 11.33		Самостоятельная работа № 11: № 1, 2, 3	11.30, 11.32

Методические комментарии

После определения криволинейной трапеции следует обратить внимание на то, что определение позволяет, например, треугольник или трапецию, расположенные на координатной плоскости специальным образом, считать криволинейной трапецией. Однако этот факт не означает, что понятие криволинейной трапеции обобщает понятие треугольника.

Заметим, что нельзя ввести понятие площади криволинейной трапеции с помощью определения площади многоугольника, которое было приведено ранее в курсе планиметрии.

Далее изложение материала идёт с допустимой степенью нестрогости, приемлемой для школьного курса математики: рассказывается, как найти площадь фигуры, предварительно не определив понятие площади для этой фигуры.

Результат теоремы 11.1 является красивым и неожиданным фактом. Однако доказательство этой теоремы непростое. Это следует учитывать, планируя работу в классе.

Введение понятия определенного интеграла тоже характерно для школьного курса математики. Попытка введения этого понятия через предел интегральной суммы не оправдано в силу сложности самого понятия предела интегральной суммы.

Формула Ньютона — Лейбница и правила вычисления определённого интеграла достаточно алгоритмизируемы, учащиеся могут легко научиться их применять. Основные трудности при вычислении определённых интегралов обычно представляет нахождение первообразных.

Важно показать учащимся, что с помощью определённого интеграла можно вычислять площадь не только криволинейной трапеции, но и любых фигур, ограниченных графиками непрерывных функций. Подробное обоснование, приведённое после примера 3 данного параграфа, и пример 4 предоставляют учащимся наглядный и понятный инструментарий для этого.

Комментарии к упражнениям

№ 11.19 (1). Воспользуйтесь формулой $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$.

№ 11.19 (4). Представьте дробь, стоящую под интегралом, в виде суммы двух дробей.

№ 11.30. Докажите, что подынтегральная функция является нечётной.

§ 12. Вычисление объёмов тел

Технологическая карта урока

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать математический аппарат вычисления объёма тела с помощью интегрирования. ***Личностные***: формировать ответственное отношение к обучению, готовности к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию. ***Метапредметные***: формировать умение использовать приобретённые знания в практической деятельности.
Планируемые результаты	Учащийся научится использовать математический аппарат вычисления объёма тела с помощью интегрирования.
Основные понятия	Формула объёма тела.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	12.1, 12.3, 12.4		Самостоятельная работа № 12: № 1, 2, 3	12.2, 12.5

Методические комментарии

В параграфе проводится аналогия между вычислением объёма тела в пространстве с помощью интегрирования функции, описывающей зависимость площади сечения тела от координаты x, и вычислением площади фигуры на плоскости с помощью интегрирования функции, описывающей зависимость длины отрезка, принадлежащего фигуре, от координаты x. Формула для вычисления объёма тела разъясняется с помощью очевидных наглядных соображений.

Подробно рассматривается доказательство формулы для вычисления объёма пирамиды. Важно разобрать с учащимися идею этого доказательства, поскольку именно с помощью этой идеи в курсе стереометрии будут обоснованы формулы для вычисления объёмов призмы, цилиндра, конуса, усечённого конуса.

Также в параграфе приведена формула для вычисления объёма тела вращения, заданного вращением графика непрерывной функции, принимающей неотрицательные значения, вокруг оси абсцисс.

Комментарии к упражнениям

№ 12.5. Можно предложить учащимся вывести формулу для вычисления объёма усечённого конуса.

Контрольная работа № 3

Глава 3. Комплексные числа

§ 13. Множество комплексных чисел

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: владеть понятиями «множество комплексных чисел», «комплексное число», формировать умение выполнять операции над комплексными числами.

Личностные: формировать умение формулировать собственное мнение.

Метапредметные: развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.

Планируемые результаты

Учащийся научится владеть понятиями «множество комплексных чисел», «комплексное число», формировать умение выполнять операции над комплексными числами.

Основные понятия

Множество комплексных чисел, комплексное число, единица, алгебраическая форма комплексного числа, действительная часть комплексного числа, мнимая часть комплексного числа, чисто мнимое комплексное число, равные комплексные числа, модуль комплексного числа, произведение комплексных чисел, сопряжённые комплексные числа, частное комплексных чисел.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	13.1, 13.2, 13.3, 13.4, 13.6, 13.8			13.5, 13.7
2	13.9, 13.11, 13.13, 13.14, 13.16	13.17		13.10, 13.12, 13.15, 13.18
3	13.19, 13.21, 13.23, 13.25, 13.27	13.29, 13.31		13.20, 13.22, 13.24, 13.26, 13.28, 13.30, 13.32

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
4	13.33, 13.35, 13.38, 13.39, 13.41, 13.43	13.36, 13.40, 13.44	Самостоятельная работа № 13: № 1, 2, 3	13.34, 13.37, 13.42, 13.45

Методические комментарии

Следует разъяснить учащимся, что означает «решить уравнение на некотором числовом множестве». Говорят, что уравнение имеет решение на некотором числовом множестве, если существуют корни уравнения, принадлежащие этому множеству. В начале параграфа приводятся примеры того, как уравнения, которые в младших классах казались неразрешимыми, по мере введения новых числовых множеств — целых, рациональных, действительных чисел — становились разрешимыми на этих новых множествах. Поэтому, раз уж можно составить уравнения, которые описывают некоторые реальные ситуации, но оказываются неразрешимыми на известных нам множествах, целесообразно пробовать искать новые числовые множества, которые предоставят необходимый аппарат решения таких уравнений.

При обсуждении цепочки множеств $\boldsymbol{N}$–$\boldsymbol{Z}$–$\boldsymbol{Q}$–$\boldsymbol{R}$ используется слово «расширение» множеств. Учащиеся должны понимать, это слово используется на неформальном уровне, но если возникнут вопросы, то учитель должен объяснить, что имеется в виду под использованием этого слова для перехода от множества к другому множеству, для которого первое является подмножеством.

В параграфе предлагается найти множество, на котором будет разрешимо уравнение $x^2 + 1 = 0$, и выдвигаются требования к этому числовому множеству.

Следует подчеркнуть, что при расширении всех предыдущих числовых множеств соблюдались два условия:

- каждое новое множество содержало в себе предыдущее;
- при введении арифметических действий на этом новом множестве эти же действия «срабатывали» на элементах предыдущих множеств, причём их результат был тем же, что и раньше;
- свойства арифметических действий над числами, введённые для какого-либо числового множества, сохранялись и при расширении этого множества.

По этим же принципам выдвигается требование и к множеству комплексных чисел.

Существует два основных подхода введения множества комплексных чисел: 1) с помощью упорядоченных пар; 2) с помощью векторов.

Первый путь более абстрактный. Поскольку учащимся знакомо понятие вектора, они умеют оперировать элементами множества векторов, то в учебнике выбран второй подход введения множества комплексных чисел. Здесь тоже есть определённый сложный момент, когда вектор на плоскости получает ещё одно название — комплексное число.

Далее доказывается, что для введённого таким образом множества комплексных чисел выполняются все поставленные требования, а уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет на этом множестве решения. Этот приём может показаться учащимся неестественным, однако следует подчеркнуть, что если такие числа выполняют свою задачу, то они имеют право на существование.

Отдельно следует уделить внимание тому, в каком смысле множество действительных чисел — это подмножество множества комплексных чисел: в силу приведённого определения действительные числа — это то множество векторов, которые коллинеарны оси x. Здесь следует обратить внимание учащихся на тот факт, что они давно пользуются аппаратом изображения действительных чисел на числовой прямой, и в данном случае конец вектора, изображающего действительное число на координатной прямой, как раз и представляет собой точку на числовой прямой, соответствующую действительному числу.

На основании предложенного определения и известного учащимся аппарата работы с векторами вводится ряд понятий, связанных с комплексными числами: алгебраическая часть комплексного числа, равные комплексные числа, сложение комплексных чисел, модуль комплексного числа, сопряжённые комплексные числа и т. п. Если учащиеся воспримут идею отождествления комплексного числа с вектором, то эти понятия для них не составят затруднений.

Новым для учащихся будет понятие произведения комплексных чисел, поскольку понятие произведения векторов, которое могло бы послужить аналогом, не рассматривается. После введения этого понятия следует показать, что:

- произведение комплексных чисел обладает всеми известными учащимся свойствами произведения действительных чисел;
- $i^2 + 1 = 0$;

• если записать два действительных числа как комплексные и найти их произведение по правилу умножения комплексных чисел, то будет получено то же действительное число, которое получается и при их умножении как действительных чисел.

После этого деление комплексных чисел вводится, как и для других числовых множеств, как операция, обратная умножению.

В итоге изучения этого параграфа учащиеся должны прийти к выводу, что введение множества комплексных чисел является логичным и полезным шагом в развитии математики.

Комментарии к упражнениям

№ 13.45. Докажите, что $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

§ 14. Комплексная плоскость. Тригонометрическая форма комплексного числа

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения оперировать понятиями комплексной плоскости, тригонометрической формы комплексного числа, изображать комплексное число на комплексной плоскости, записывать комплексное число в тригонометрической форме. ***Личностные***: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные***: формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями комплексной плоскости, тригонометрической формы комплексного числа, изображать комплексное число на комплексной плоскости, записывать комплексное число в тригонометрической форме.
Основные понятия	Комплексная координата, действительная ось, мнимая ось, комплексная плоскость, аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма комплексного числа.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	14.1, 14.2, 14.4, 14.5			14.3, 14.6
2	14.7, 14.9, 14.10, 14.12, 14.14			14.8, 14.11, 14.13, 14.15
3	14.16, 14.17, 14.19, 14.21	14.18, 14.23	Самостоятельная работа № 14: № 1, 2, 3	14.20, 14.22, 14.24

Методические комментарии

Введение понятия комплексной плоскости не вызывает затруднения у учащихся. При этом требуется определённое время, чтобы учащиеся привыкли к новым обозначениям как координат точки, так и к самим названиям координатных осей.

Задачи, в которых предлагается изобразить некоторое множество комплексных чисел на комплексной плоскости, основаны на уже имеющихся у учащихся навыках работы с векторами и построения графиков уравнений и неравенств. Все графические образы знакомы учащимся. Здесь лишь может возникнуть психологическая сложность в том смысле, что учащиеся должны использовать новый математический язык.

Перед ознакомлением с тригонометрической формой записи комплексного числа следует напомнить учащимся, каким образом в предыдущих классах при изучении тригонометрических функций использовалась единичная окружность и движение точки по ней. После актуализации этой информации учащиеся легко воспримут рисунок 14.8 и дальнейшее определение тригонометрической формы комплексного числа.

Следует подчеркнуть, что тригонометрическая форма записи числа имеет фиксированный формат. Попытка преобразовать её по правилам преобразования алгебраических выражений (например, заменить плюс минусом, раскрыть скобки и т. п.) приведёт к тому, что будет получена новая допустимая запись этого же комплексного числа, однако именно тригонометрической формой числа эта запись являться не будет.

Также учащиеся должны понимать, почему для числа 0 не вводится тригонометрическая форма записи.

Комментарии к упражнениям

№ 14.19, 14.20. Следует воспользоваться тем, что модуль разности комплексных чисел — это расстояние между точками комплексной плоскости, изображающих данные комплексные числа.

№ 14.23, 14.24. Следует записать данное комплексное число в алгебраической форме. Преобразовать полученное равенство, получив соотношения между параметрами a и b. Затем построить график уравнения на комплексной плоскости.

§ 15. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, Корень n-й степени из комплексного числа

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения выводить и применять правила умножения, деления и извлечения корня n-й степени для комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.

Личностные: формировать умение соотносить полученный результат с поставленной целью.

Метапредметные: формировать умения устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится выводить и применять правила умножения, деления и извлечения корня n-й степени для комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.

Основные понятия

Модуль произведения двух комплексных чисел, модуль частного двух комплексных чисел, формула Муавра, корень n-й степени из комплексного числа.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	15.1, 15.3, 15.5			15.2, 15.4, 15.6

Окончание

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
2	15.7, 15.9, 15.11, 15.13, 15.15	15.17	Самостоятельная работа № 15: № 1, 2, 3	15.8, 15.10, 15.12, 15.14, 15.16

Методические комментарии

В данном параграфе вводятся правила выполнения операций умножения и деления для комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Вывод этих формул не является сложным и основан на записи произведения (частного) двух комплексных чисел в тригонометрической форме, дальнейшем упрощении полученных выражений и записи результата опять же в тригонометрической форме.

Возведение комплексного числа в степень с натуральным показателем n основано на том, что это действие фактически является вычислением произведения n одинаковых множителей. Поэтому учащимся будут понятными и формула Муавра, и отсылка к методу математической индукции для её доказательства.

Немного неожиданным, но очень красивым фактом будет то, что на множестве комплексных чисел корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений, причём они гармонично расположены на окружности.

Примеры решения задач, рассмотренные в рубрике «Когда сделаны уроки» после этого параграфа, достаточно сложны. В классе с базовым уровнем изучения математики вряд ли стоит требовать от всех учащихся детального ознакомления с ходом решения данных задач, а также умения решать задачи аналогичного уровня. Этот рассказ следует рассматривать больше как демонстрацию широких возможностей использования комплексных чисел для решения задач неожиданными и красивыми способами, что опять же аргументирует для учащихся целесообразность введения множества комплексных чисел.

Комментарии к упражнениям

№ 15.13. В зависимости от уровня класса можно предложить учащимся более широкий список свойств корней n-й степени из единицы. Например, произведение двух любых чисел из множества $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ является числом этого множества; любая степень элемента этого множества является элементом этого множества.

§ 16. Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения использовать методы решения алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел, доказывать и применять теорему Виета для многочленов степени выше второй с коэффициентами из множества комплексных чисел.

Личностные: формировать независимость суждений.

Метапредметные: формировать умения устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится использовать методы решения алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел, доказывать и применять теорему Виета для многочленов степени выше второй с коэффициентами из множества комплексных чисел.

Основные понятия

Основная теорема алгебры, следствие из основной теоремы алгебры, теорема Виета.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	16.1, 16.3, 16.5			16.2, 16.4, 16.6
2	16.7, 16.10, 16.12, 16.14	16.8		16.9, 16.11, 16.13, 16.15
3	16.16, 16.18, 16.20, 16.23, 16.24	16.19, 16.21, 16.25	Самостоятельная работа № 16: № 1, 2, 3	16.17, 16.22

Методические комментарии

В начале параграфа показано, что благодаря введению множества комплексных чисел любое квадратное уравнение имеет два корня на множестве комплексных чисел.

Для того чтобы показать учащимся, что привычное для них квадратное уравнение с положительным дискриминантом является частным случаем, который также успешно решается на множестве комплексных чисел, можно, обратившись к материалу предыдущего параграфа, найти два корня 2-й степени из положительного числа, например 1 или 4, записанного в тригонометрической форме.

Основная теорема алгебры, рассмотренная в данном параграфе, ещё раз подчёркивает целесообразность введения множества комплексных чисел.

Рассматривая следствие из основной теоремы алгебры, следует подчеркнуть, что среди полученного произведения линейных множителей могут быть одинаковые.

В параграфе доказывается теорема Виета для многочлена третьей степени. Для тех, кто хочет знать больше, предлагается участие в соответствующем проекте.

Комментарии к упражнениям

№ 16.7—16.9. Поскольку теорема 16.2 сформулирована в виде необходимого и достаточного условия, то при решении этих задач следует воспользоваться теоремой, которую условно можно назвать обратной к теореме Виета.

№ 16.10. Умножить обе части уравнения на $z - 1 = 0$, перейти к уравнению — следствию $z^7 - 1 = 0$.

№ 16.16, 16.17. Воспользуйтесь идеей решения примера 3 параграфа.

№ 16.22. Рассмотрите уравнение $x^3 = ax^2 + bx + c$.

Контрольная работа № 4

Глава 4. Элементы теории вероятностей

§ 17. Элементы комбинаторики и бином Ньютона

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения доказывать и использовать формулу бинома Ньютона, оперировать свойствами треугольника Паскаля и биномиальных коэффициентов.

Личностные: развивать готовность к самообразованию и решению творческих задач.

Метапредметные: формировать умение соотносить свои действия с планируемыми результатами.

Планируемые результаты

Учащийся научится доказывать и использовать формулу бинома Ньютона, оперировать свойствами треугольника Паскаля и биномиальных коэффициентов.

Основные понятия

Перестановка, размещение, сочетание, формула бинома Ньютона, биномиальные коэффициенты, треугольник Паскаля.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	17.1, 17.2, 17.3, 17.5, 17.7			17.4, 17.6, 17.8
2	17.9, 17.11, 17.14, 17.16	17.12		17.10, 17.13, 17.15, 17.17
3	17.18, 17.21, 17.23, 17.25	17.19		17.20, 17.22, 17.24, 17.26
4	17.27, 17.30, 17.33, 17.36	17.28, 17.31, 17.34		17.29, 17.32, 17.35, 17.37
5	17.38, 17.40, 17.43, 17.44, 17.46	17.41, 17.47	Самостоятельная работа № 17: № 1, 2, 3	17.39, 17.42, 17.45

Методические комментарии

В начале параграфа в краткой форме повторяется материал по комбинаторике, который знаком учащимся из предыдущих классов. В упражнениях к этому параграфу предложено немало задач по комбинаторике, с помощью которых можно повторить основные приёмы решения задач по данной теме.

Формулу бинома Ньютона можно доказать методом математической индукции. Это доказательство несложное, но достаточно формальное. Поэтому в параграфе предлагается комбинаторное доказательство. Оно помогает учащимся лучше понять структуру формулы бинома Ньютона.

В параграфе приводится общий вид не k-того слагаемого в формуле бинома Ньютона, а $k + 1$-го слагаемого. Такая формула выглядит компактнее и лучше запоминается учащимися. Нередко при применении этой формулы учащиеся считают, что они нашли k-тое слагаемое. Профилактика этой ошибки требует соответствующей работы.

Треугольник Паскаля — красивый математический объект, обладающий целым рядом замечательных свойств. Этим можно воспользоваться при формировании положительного отношения к предмету «математика».

Комментарии к упражнениям

№ 17.41. Искомое количество равно количеству нулей в записи предпоследнего слагаемого в формуле бинома Ньютона для двучлена $(1000+1)^{1000}$, т. е. количеству нулей в значении выражения $C_{1000}^{999} \cdot 1000 \cdot 1^{999}$.

№ 17.30, 17.33—17.37. Эти задачи представляют единый цикл задач, в которых работает одна и та же комбинаторная модель. Изменение некоторых параметров модели принципиально меняет решение задачи. Задачи расположены в порядке возрастания сложности. Для максимального эффекта желательно проработать с учащимися весь цикл задач.

№ 17.30. У каждого шара есть три возможности расположения. Поскольку шаров n, то по правилу произведения получаем ответ 3^n.

№ 17.33. Учащиеся должны понимать, чем отличается условие этой задачи от задачи 17.30.

§ 18. Аксиомы теории вероятностей

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения оперировать понятиями пространство элементарных исходов, несовместные события; устанавливать соотношения между несколькими со-

бытиями, представлять соотношения между событиями с помощью диаграмм Эйлера, выполнять операции объединения, пересечения, дополнения событий и применять правила нахождения вероятности результатов этих операций.

Личностные: формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки.

Метапредметные: формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать.

Планируемые результаты Учащийся научится оперировать понятиями пространство элементарных исходов, несовместные события; устанавливать соотношения между несколькими событиями, представлять соотношения между событиями с помощью диаграмм Эйлера, выполнять операции объединения, пересечения, дополнения событий и применять правила нахождения вероятности результатов этих операций.

Основные понятия Результат, элементарный исход, пространство элементарных исходов, случайное событие, вероятность случайного события, достоверное событие, невозможное событие, несовместные события, объединение событий, операции над событиями, пересечение событий, дополнение события, разность событий, вероятность объединения двух несовместных событий, вероятность достоверного события, алгебра событий, вероятностное пространство, аксиомы теории вероятностей.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополни-тельные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	18.1, 18.3, 18.5, 18.7			18.2, 18.4, 18.6, 18.8
2	18.9, 18.10, 18.11, 18.13, 18.15, 18.17			18.12, 18.14, 18.16, 18.18
3	18.19, 18.21, 18.24, 18.26, 18.28, 18.31	18.22, 18.29, 18.33	Самостоятельная работа № 18: № 1, 2, 3	18.20, 18.23, 18.25, 18.27, 18.30, 18.32

Методические комментарии

В начале параграфа уточняются знакомые из предыдущих классов понятия: элементарный исход, пространство элементарных исходов. Формируется достаточно абстрактное представление о событии как о подмножестве пространства элементарных исходов. В зависимости от уровня класса можно разъяснить учащимся, что не всякое подмножество пространства элементарных исходов является случайным событием.

Сформировать у учащихся понятия «алгебра событий» и «вероятностное пространство» достаточно сложно. Здесь следует оценивать возможности класса, не требуя глубокого понимания сути этих понятий.

Параграф также посвящён изучению соотношений между событиями. В начале параграфа вводится и рассматривается на примерах понятие несовместных событий. Учащиеся должны хорошо усвоить это понятие, потому что именно на основании того, являются ли события несовместными, определяются формулы, которые можно применять для вычисления вероятности нескольких событий в той или иной ситуации.

Следует продолжить формировать у учащихся навыки трактовать соотношения между событиями с помощью диаграмм Эйлера.

Определения объединения, пересечения, дополнения событий проиллюстрированы в учебнике диаграммами Эйлера. Рекомендуется при рассмотрении примеров и решении первых задач этого параграфа также использовать диаграммы Эйлера — как для наглядности самой задачи, так и для закрепления навыков представления информации в виде диаграмм Эйлера. Удобство использования такого аппарата продемонстрировано в ходе доказательства теоремы 18.1.

В параграфе прослеживается аналогия между операциями над событиями и операциями над множествами. Это сделает понятным для учащихся многие практические аспекты применения операций над событиями для вычисления вероятностей.

Важно подчеркнуть, что когда идёт речь об операциях над событиями, то эти события относят к одному и тому же опыту.

Комментарии к упражнениям

№ 18.26. События получить в подарок только цветы и получить в подарок цветы и духи являются несовместными. Их объединение — это событие получить в подарок цветы. Его вероятность равна $10\% + 15\%$.

№ 18.29. Пусть событие A состоит в том, что выпускник будет принят на работу в банк, а событие B — в страховую компанию. Тогда событие $A \cap B$ состоит в том, что выпускнику поступит предложение о работе с обоих мест. Таким образом, по условию задачи выполняются равенства: $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}6$; $P(A \cap B) = 0{,}4$. Событие $A \cup B$ состоит в том, что выпускник будет принят на работу хотя бы в одно из мест. Если воспользоваться теоремой 18.1, то получим $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7$.

№ 18.31 (1). Пусть A — это событие, что лампочка проработает не менее года, B — событие, выключатель проработает не менее года. По условию $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}01$. Отсюда $P(A \cup B) = 0{,}99$. Тогда искомая вероятность равна $P(A \cup B) - P(A) = 0{,}03$. Решение этой задачи удобно проиллюстрировать с помощью рисунка 1.

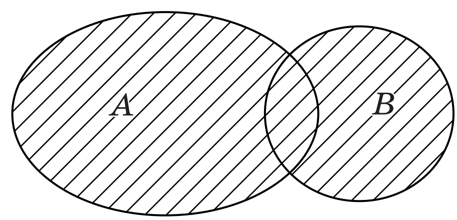


Рис. 1

§ 19. Условная вероятность

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения оперировать понятием условной вероятности, применять формулу полной вероятности и формулу Байеса, применять метод решения вероятностных задач с помощью построения дендрограмм. ***Личностные***: формировать способность осознанного выбора и построения дальнейшей индивидуальной траектории. ***Метапредметные***: осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием условной вероятности, применять формулу полной вероятности и формулу Байеса, применять метод решения вероятностных задач с помощью построения дендрограмм.
Основные понятия	Условная вероятность, дендрограмма, формула полной вероятности, формула Байеса.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	19.1, 19.3, 19.5, 19.6			19.2, 19.4, 19.7
2	19.8, 19.10, 19.12, 19.14, 19.16			19.9, 19.11, 19.13, 19.15, 19.17
3	19.18, 19.19, 19.21, 19.23		Самостоятельная работа № 19: № 1, 2, 3	19.20, 19.22

Методические комментарии

В начале параграфа не рассматривается строгое определение условной вероятности. Это понятие вводится с помощью интуитивно понятных примеров. В параграфе пример смоделирован с помощью игральных кубиков. Можно предложить учащимся составить аналогичный пример в опыте, в котором подбрасываются две монеты.

После того, как у учащихся сформировано интуитивно понятное представление об условной вероятности, дальше начинается работа по выявлению свойств этого понятия. В ходе этой работы выясняется, что формула $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ может служить критерием для этого понятия. Тем самым принятое определение условной вероятности становится мотивированным. Следует обратить особое внимание учащихся на то, что в случае, когда $P(A) = 0$, условную вероятность $P_A(B)$ не определяют.

В параграфе рассматривается удобный и наглядный метод решения вероятностных задач с помощью построения дендрограмм (древовидных диаграмм). Обычно учащиеся легко воспринимают идею построения дендрограмм и с удовольствием их используют. Здесь надо следить за тем, чтобы учащиеся на каждом шагу построения дендрограммы учитывали все возможные ветвления, а при определении числовых значений вероятностей, которые следует подписать над ветвями дендрограммы, — правильно их подсчитывали. В частности, элементом контроля является то, что сумма вероятностей, подписанных на стрелках, выходящих из одного узла дендрограммы, должна быть равна единице. Следует разобрать с учащимися, почему это условие должно выполняться.

Формула $P_A(B) \cdot P(A) = P(A \cap B)$ позволяет на основании составленной дендрограммы вычислять вероятности событий, соответствующих листам дендрограммы. Далее, при формировании соответствующих навыков, учащиеся смогут использовать эту формулу и без изображения дендрограммы.

Заметим, что дендрограмма является удобным средством для разъяснения формулы полной вероятности.

Комментарии к упражнениям

№ 19.12. Поскольку путешественник не выбрал ни одного портрета из Франции, то выбор происходил среди 30 фотографий (10 пейзажей из Франции и 20 фотографий из Италии). В этом наборе 16 пейзажей (6 из Италии и 10 из Франции). Поэтому вероятность того, что первая выбранная фотография будет пейзажем (событие A), равна $P(A) = \frac{16}{30}$.

После того, как первый пейзаж выбран, в рассмотрении останутся 29 фотографий, из которых 15 пейзажей. Поэтому если событие B состоит в том, что вторая выбранная фотография окажется пейзажем, то $P_A(B) = \frac{15}{29}$.

Далее, используя формулу (1), получаем

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{16}{30} \cdot \frac{15}{29} = \frac{8}{29}.$$

№ 19.16. Пусть событие A состоит в том, что наугад выбранный клиент банка имеет текущий счёт, а событие B — в том, что он имеет депозитный счёт. Тогда $P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}6$. По условию задачи $P_A(B) = 0{,}7$. Далее воспользуемся формулой Байеса. Имеем

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}8}{0{,}6} = \frac{14}{15}.$$

№ 19.14 (1). Воспользовавшись теоремой 16.1, можно получить, что искомая вероятность равна $\frac{7}{10} : \frac{9}{10}$.

№ 19.21. Для данного опыта удобно воспользоваться такой вероятностной моделью. Если второй шар должен быть красным, то можно считать, что в коробке с самого начала лежит на один красный шар меньше. Тогда ответ получается сразу: $\frac{10}{27}$.

№ 19.22. Пусть событие A состоит в том, что взятые шары одного цвета, а событие B — в том, что среди взятых шаров есть красный. Тогда искомая вероятность $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Событие $A \cap B$ означает, что оба взятых шара красные. Поэтому $P(A \cap B) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$. Событие $\bar{B}$ состоит в том, что оба взятых шара синие. Поэтому $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{10}$.

§ 20. Независимые события

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения оперировать понятиями независимые события и зависимые события, применять их для решения задач с соответствующей вероятностной моделью.

Личностные: формировать способность осознанного выбора и построения дальнейшей индивидуальной траектории.

Метапредметные: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями независимые события и зависимые события, применять их для решения задач с соответствующей вероятностной моделью.

Основные понятия

Независимые события, зависимые события.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	20.1, 20.3, 20.5, 20.7			20.2, 20.4, 20.6, 20.8
2	20.9 , 20.11, 20.14, 20.16, 20.18	20.12, 20.20	Самостоятельная работа № 20: № 1, 2, 3	20.10, 20.13 20.15, 20.17, 20.19, 20.21

Методические комментарии

В начале параграфа не рассматривается строгое определение независимых событий. Это понятие вводится с помощью интуитивно понятных примеров. Даже сам термин «независимые события» способствует усвоению этого понятия. Следует разъяснить учащимся, почему для событий A и B равенства $P_A(B) = P(B)$ и $P_B(A) = P(A)$ не могут служить определением независимости этих событий.

Возможно, определение независимых событий с помощью формулы $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ носит формальный характер и идёт в разрез с интуитивным представлением учащихся об этом понятии. Однако текст параграфа до формального определения подготавливает учащихся, делая определение более доступным.

Формальное определение независимых событий служит основой для решения большого количества вероятностных задач.

Данный параграф представляет определённую сложность для учащихся, потому что в нём происходит переход от наглядно-интуитивных представлений о вероятностных задачах к достаточно формализованному подходу. Поэтому при изучении материала этого параграфа следует постоянно получать обратную связь от учащихся об усвоении ими материала, а в случае сомнений — подкреплять излагаемый материал большим количеством наглядных примеров.

Комментарии к упражнениям

№ 20.11 (4—6). Пусть событие A состоит в том, что в мишень попадёт Андрей, B — Сергей, C — Пётр.

4) Событие, состоящее в том, что в мишень попадёт ровно один из юношей, является объединением трёх несовместных событий $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$ и $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$. Поскольку юноши стреляли независимо один от другого, то

$$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}06.$$

Аналогично находим

$$P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) = P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}21.$$

Поэтому искомая вероятность равна $0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}21 = 0{,}36$.

5) Событие, состоящее в том, что в мишень не попадёт только один из юношей, является объединением трёх несовместных событий $\bar{A} \cap B \cap C$, $A \cap \bar{B} \cap C$ и $A \cap B \cap \bar{C}$. Далее найдите вероятности каждого из этих событий и сложите их.

6) Событие, состоящее в том, что в мишень попадут по крайней мере двое юношей, является объединением двух несовместных событий: X = «в мишень попадут ровно двое юношей» и Y = «в мишень попадут трое юношей». Вероятность события X найдена в пункте 5 и составляет 0,41. Найдём вероятность события Y. Имеем:

$$P(Y) = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}14.$$

Поэтому искомая вероятность равна $0{,}41 + 0{,}14 = 0{,}55$.

№ 20.14—20.17. Выражение, записанное в ответе, может служить подсказкой к решению.

§ 21. Случайная величина

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения оперировать понятиями случайной величины, распределения вероятностей случайной величины; использовать соответствующий математический аппарат для анализа и оценки случайных величин.

Личностные: формировать умение контролировать процесс своей математической деятельности.

Метапредметные: формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями случайной величины, распределения вероятностей случайной величины; использовать соответствующий математический аппарат для анализа и оценки случайных величин.

Основные понятия

Случайная величина, распределение вероятностей, сумма случайных величин.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	21.1, 21.2, 21.3, 21.4, 21.5, 21.7, 21.8			21.6, 21.9

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
2	21.10, 21.12, 21.14, 21.16, 21.19, 21.21	21.18	Самостоятельная работа № 21: № 1, 2, 3	21.11, 21.13, 21.15, 21.17, 21.20, 21.22

Методические комментарии

Учащиеся знакомы со многими переменными величины. Изучили целый ряд закономерностей их изменений. Случайная величина — это объект иного рода. Её значение заранее предсказать нельзя. Учащиеся должны понимать, в чём заключается принципиальное отличие случайной величины от переменной величины, изменение которой подчиняется определённой закономерности.

Необходимо, чтобы учащиеся усвоили, каким образом формируется множество значений случайной величины и как записывается соответствующее распределение вероятностей случайной величины. Целесообразно отдельно обратить внимание и на то, что существуют случайные величины с бесконечным множеством значений (однако задачи с такими случайными величинами учащимся не предлагаются).

Формально определение случайной величины как числовой функции, аргументами которой являются элементарные исходы, даётся в параграфе лишь после того, как это понятие было подготовлено соответствующими примерами. Желательно, чтобы учащиеся дополнили эти примеры.

Основными навыками, которые должны приобрести учащиеся для работы со случайными величинами, является составление множества значений случайной величины, распределения вероятностей, а также умение предоставить эту информацию в графическом виде и произвести на основании этих данных оценку исследуемой ситуации.

Важно, чтобы учащиеся понимали, что распределение вероятностей случайной величины — это не просто набор вероятностей. Здесь обязательно следует указывать соответствие между значением случайной величины и вероятностью, с которой случайная величина принимает это значение.

Поскольку случайная величина является функцией, то введение операций сложения и умножения случайных величин представляется вполне естественным.

Комментарии к упражнениям

№ 21.7—21.11. Решения задач базируются на решении примера 2 основного текста учебника.

№ 21.16—21.22. Решения задач может базироваться на идее решения примера 3 основного текста учебника.

• Обратите внимание, что в таблице распределения вероятностей случайной величины в строке значений случайной величины все числа должны быть различны. В то же время в таблице, устанавливающей соответствие между элементарными исходами опыта и значениями случайной величины, в строке значений могут встречаться равные числа.

§ 22. Схема Бернулли. Биноминальное распределение

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения оперировать понятием схемы Бернулли, биноминальным распределением случайной величины, применять эти понятия для соответствующих вероятностных моделей. ***Личностные***: формировать умение представлять результат своей деятельности. ***Метапредметные***: формировать умение осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием схемы Бернулли, биноминальным распределением случайной величины, применять эти понятия для соответствующих вероятностных моделей.
Основные понятия	Вероятностная модель, испытание Бернулли, схема Бернулли, вероятность количества успешных исходов в схеме Бернулли, биномиальное распределение, распределение Бернулли, гипергеометрическое распределение.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	22.1, 22.3, 22.5, 22.6			22.2, 22.4, 22.7
2	22.8, 22.10, 22.12, 22.13			22.9, 22.11, 22.14
3	22.15, 22.17, 22.19, 22.21, 22.24	22.22	Самостоятельная работа № 22: № 1, 2, 3	22.16, 22.18, 22.20, 22.23, 22.25

Методические комментарии

Понятие о схеме Бернулли вводится на интуитивно понятном примере с попаданием мяча в баскетбольную корзину. При его рассмотрении следует подчеркнуть, что все испытания (т. е. броски, которые выполняет баскетболист) равновероятны (вероятность попадания в корзину от броска к броску не меняется). Исходов у каждого испытания может быть только два, поэтому один из них можно назвать «желаемым» (в данном примере — попадание мяча в корзину) и определить для него вероятность, которая для всех испытаний постоянна. Именно это даёт основания в качестве параметров, описывающих схему, брать только два параметра:

- параметр n — количество повторения испытаний (в данном примере — бросков);
- параметр p — вероятность желаемого результата в каждом испытании (в данном примере — попадания мяча в корзину).

Схему Бернулли можно использовать в том случае, когда опыт сформирован из равновероятных независимых испытаний таким образом, что его можно описать с помощью параметров n и p.

Когда мы ищем вероятность получения m удачных исходов с помощью схемы Бернулли из n испытаний, то $n - m$ испытаний будут неуспешными. Тогда у учащихся возникнет соблазн просто перемножить вероятности этих испытаний, взяв соответственно m множителей, равных p, и $(n - m)$ множителей, равных $(1 - p)$. Следует уделить особое внимание тому, почему этот подход не даёт нужного результата, а для получения правильного результата при выводе формулы вычисления вероятности в схеме Бернулли используется множитель C_n^m.

Важно подчеркнуть, что схема Бернулли применима для многих задач внешне не похожих друг на друга. Распознать нужную вероятностную модель поможет опыт, приобретаемый в ходе решения упражнений.

Также в параграфе рассказывается о биномиальном распределении случайной величины. Важно, чтобы учащиеся хорошо усвоили это понятие, поскольку с помощью этого распределения удобно вводить целый ряд понятий, связанных со случайными величинами и их распределениями.

Комментарии к упражнениям

№ 22.8—22.16. Выражение, записанное в ответе, может служить подсказкой к решению.

№ 22.22. Пусть случайная величина x равна количеству заболевших врачей. Случайная величина x имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 25$ и $p = 0{,}08$. Требуется найти вероятность события $P(x \geqslant 2)$. Получаем

$$P(x \geqslant 2) = 1 - (P(x = 0) + P(x = 1)) = 1 - (0{,}92^{25} + C_{25}^{1} \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^{24}).$$

§ 23. Характеристики случайной величины

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения оперировать основными характеристиками случайной величины, оценивать реальные ситуации и принимать оптимальные решения, используя характеристики случайной величины. ***Личностные***: формировать умение формулировать собственное мнение. ***Метапредметные***: формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в окружающей жизни.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать основными характеристиками случайной величины, оценивать реальные ситуации и принимать оптимальные решения, используя характеристики случайной величины.
Основные понятия	Математическое ожидание, дисперсия случайной величины, стандартное отклонение, среднее абсолютное отклонение, свойства математического ожидания, свойства дисперсии.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	23.1, 23.3, 23.5			23.2, 23.4, 23.6
2	23.7, 23.9, 23.10, 23.12, 23.13			23.8, 23.11, 23.14
3	23.15, 23.17, 23.19, 23.20	23.22	Самостоятельная работа № 23: № 1, 2, 3	23.16, 23.18, 23.21, 23.23

Методические комментарии

В качестве одного из инструментов оценки вводится понятие математического ожидания. Желательно, чтобы учащиеся поняли, что математическое ожидание играет роль среднего значения величины в опытах, где значение числового результата носит вероятностный характер.

Изложение теоретического материала сопровождается примерами, причём происходит переход от «игровых», с точки зрения учащихся, примеров с бросанием монеток, к примерам, содержащим описание реальных событий и принятие экономических решений. Следует обязательно разобрать с учащимися эти примеры, а также добиться осознанного решения учащимися задач этого параграфа с сюжетами из реальной жизни. Учащиеся должны прийти к выводу, когда целесообразно применять аппарат анализа случайных величин для принятия тех или иных решений в производственной и хозяйственной деятельности.

Следует обратить особое внимание учащихся на текст после примера 1. В нём рассказывается о другом способе вычисления математического ожидания с учётом пространства элементарных исходов.

С понятием дисперсии учащиеся встречались, изучая статистические характеристики. Поэтому эту характеристику случайной величины они воспринимают без особых затруднений.

Также в параграфе изучаются основные свойства математического ожидания и дисперсии.

Комментарии к упражнениям

№ 23.20. Пусть случайная величина x равна количеству выпавших шестёрок при подбрасывании трёх игральных кубиков. Тогда случайная величина x имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 3$ и $p = \frac{1}{6}$. Имеем

Значение x	0	1	2	3
Вероятность	$\frac{5^3}{6^3}$	$3 \cdot \frac{5^2}{6^3}$	$3 \cdot \frac{5}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$

Пользуясь определением математического ожидания, находим

$$M(x) = 0 \cdot \frac{5^3}{6^3} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{5^2}{6^3} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{6^3} + 3 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{75 + 30 + 3}{216} = \frac{1}{2}.$$

Пользуясь определением, находим дисперсию: $D(x) = \frac{5}{12}$.

№ 23.22 (1). Пусть случайная величина x равна количеству забитых мячей в серии из пяти пенальти. Тогда случайная величина x имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 5$ и p. Положим, $q = 1 - p$. Тогда таблица распределения вероятностей имеет вид

Значение x	0	1	2	3	4	5
Вероятность	q^5	$5pq^4$	$10p^2q^3$	$10p^3q^2$	$5p^4q$	p^5

§ 24. Математическое ожидание суммы случайных величин

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения находить математическое ожидание суммы случайных величин, математическое ожидание случайной величины, имеющей биноминальное распределение.

Личностные: формировать способность осознанного выбора и построения дальнейшей индивидуальной траектории.

Метапредметные: формировать умение осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата.

Планируемые результаты	Учащийся научится находить математическое ожидание суммы случайных величин, математическое ожидание случайной величины, имеющей биноминальное распределение.
Основные понятия	Математическое ожидание суммы случайных величин, математическое ожидание случайной величины, имеющей биномиальное распределение.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	24.1, 24.3, 24.5, 24.7			24.2, 24.4, 24.6
2	24.8, 24.10, 24.12, 24.14			24.9, 24.11, 24.13
3	24.15, 24.16, 24.19, 24.21, 24.22	24.17, 24.23	Самостоятельная работа № 24: № 1, 2, 3	24.18, 24.20

Методические комментарии

При доказательстве теоремы 24.1 следует обратить внимание учащихся на то, что здесь используется способ вычисления математического ожидания через пространство элементарных исходов. Об этом способе подсчёта было рассказано в § 23 после примера 1 и показано, что этот способ даёт тот же результат, что и при вычислении математического ожидания на основе определения этого понятия.

Очень важно показать на примерах, что результатом теоремы 24.1 мы часто пользуемся на практике. Например, оценивая, какую прибыль могут принести два предприятия, естественно складывать средние ожидаемые прибыли каждого из предприятий.

Результат теоремы 24.1 и ключевой задачи применяется при решении целого ряда задач.

Комментарии к упражнениям

№ 24.5. Пусть случайная величина x равна количеству выпавших шестёрок при подбрасывании пяти игральных кубиков. Тогда можно записать, что $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, где случайная величина x_i равна 1, если на i-м подбрасывании выпадет шёстерка, и x_i равна 0, если на i-ом подбрасывании не выпадет шёстерка. Поскольку $M(x_i) = \frac{1}{6}$, то

$$M(x) = M(x_1) + M(x_2) + M(x_3) + M(x_4) + M(x_5) = \frac{5}{6}.$$

№ 24.8. Пусть случайная величина y_i равна 1, если на i-м испытании произошло событие A, и y_i равна 0, если на i-м испытании не произошло событие A. Тогда частота x_n события A в серии из n испытаний равна $x_n = \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$. Поскольку $M(y_i) = p$, то

$$M(x_n) = \frac{1}{n}(M(y_1) + \ldots + M(y_n)) = \frac{1}{n} \cdot np = p.$$

№ 24.15. Пусть случайная величина y_i равна 1, если на i-м выстреле мишень поражена, и y_i равна 0, если на i-м выстреле в мишень не попали. Тогда случайная величина y, равная количеству попаданий в мишень, равна $y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$. Поскольку $M(y_1) = 0{,}18$; $M(y_2) = 0{,}25$; $M(y_3) = 0{,}6$; $M(y_4) = 0{,}87$, то

$$M(y) = M(y_1) + M(y_2) + M(y_3) + M(y_4) = 1{,}9.$$

Контрольная работа № 5

Глава 5. Повторение

§ 25. О появлении посторонних корней и потере решений уравнений

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение определять основные причины нарушения равносильности при решении уравнений.

Личностные: формировать умение контролировать процесс своей математической деятельности.

Метапредметные: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты

Учащийся научится определять основные причины нарушения равносильности при решении уравнений.

Основные понятия

Метод следствий, метод равносильных преобразований.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	25.1, 25.3, 25.5			25.2, 25.4
2	25.6, 25.8, 25.10, 25.12			25.7, 25.9, 25.11, 25.13
3	25.14, 25.16, 25.18, 25.20	25.22	Самостоятельная работа № 25: № 1, 2, 3	25.15, 25.17, 25.19, 25.21, 25.23

Методические комментарии

Материал параграфа предназначен для систематизации знаний учащихся по данной теме. Поскольку учащиеся к данному моменту знакомы со всеми типами школьных уравнений, то для повторения основных положений существует широкий выбор примеров, хорошо иллюстрирующих материал.

В параграфе анализируются три основные причины изменения множества корней уравнения. Опыт показывает, что больше всего трудностей вызывает анализ третьей проблемы — применение немонотонной функции к обеим частям уравнения. После анализа этой причины учащимся должно стать понятно, почему возведение обеих частей уравнения в чётную и нечётную степени приводит к различным последствиям. Поскольку степенная функция с натуральным показателем является монотонной на промежутке $[0; \infty)$, то требование неотрицательности обеих частей уравнения может сохранить равносильность перехода.

Комментарии к упражнениям

№ 25.3, 25.4. В зависимости от уровня класса эти упражнения можно решать устно.
№ 25.5 (1). При решении этой задачи учащиеся делают распространённую ошибку, считая, что это переход ведёт только к потере корня $x = -1$. Если $-1 \notin D(f)$ или $f(-1) = 3$, то множество корней не изменится.
№ 25.12, 25.13. Эти уравнения решаются методом умножения обеих частей уравнения на выражение с переменной. Последствия такого действия описаны в параграфе.
№ 25.22, 25.23. Идея решения этих уравнений показана в примере 4 параграфа.

§ 26. Основные методы решения уравнений

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения применять основные приёмы решения уравнений. ***Личностные***: развивать навыки самостоятельной работы. ***Метапредметные***: формировать умение выдвигать гипотезы при решении задачи и понимать необходимости их проверки.
Планируемые результаты	Учащийся научится применять основные приёмы решения уравнений.
Основные понятия	Методы решения уравнений.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	26.1, 26.3, 26.5			26.2, 26.4, 26.6
2	26.7, 26.10, 26.12, 26.14, 26.16	26.9		26.8, 26.11, 26.13, 26.15, 26.17
3	26.18, 26.20, 26.22, 26.24			26.19, 26.21, 26.23, 26.25
4	26.26, 26.28, 26.30, 26.32		Самостоятельная работа № 26: № 1, 2, 3	26.27, 26.29, 26.31, 26.33

Методические комментарии

Метод разложения на множители является довольно универсальным приёмом решения различных типов уравнения. Ведь этот метод позволяет решение данного уравнения заменить на решение совокупности, состоящей из более простых уравнений.

С методом замены переменной учащиеся ознакомились в курсе алгебры 8 класса, решая биквадратные уравнения. В дальнейшем этот метод оказался достаточно результативным для многих типов уравнений. Поиск выгодной замены порой требует от учащихся изобретательности и сообразительности. Не всякая результативная замена сразу «бросается в глаза». Поэтому в параграфе рассмотрено достаточное количество примеров, иллюстрирующих этот метод.

Метод использования свойств функций, которые задают обе части уравнения, условно можно отнести к нестандартным приёмам решения уравнений. Как правило, этот метод связан с такими свойствами функций, как ограниченность и монотонность. Для определённого класса уравнений эти свойства помогают установить, что данное уравнение имеет не более одного корня, а этот корень легко угадывается. Этот метод чаще всего применим к тем уравнениям, для которых попытки их упрощения не приводят к результатам.

Комментарии к упражнениям

№ 26.3, 26.4. Среди делителей свободного члена многочлена, стоящего в левой части уравнения, подберите один из корней данного уравнения. Затем разложите многочлен на множители.
№ 26.9. Воспользуйтесь методом разложения на множители.
№ 26.10—26.17. Воспользуйтесь методом замены переменной.
№ 26.22, 26.23. Определите характер монотонности функций, которые определяет левая и правая части уравнений.
№ 26.24—26.29. Воспользуйтесь ограниченностью функций, которые определяет левая и правая части уравнений.

§ 27. Основные методы решения неравенств

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения применять основные приёмы решения неравенств.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение выдвигать гипотезы при решении задачи и понимать необходимости их проверки.

Планируемые результаты

Учащийся научится применять основные приёмы решения неравенств.

Основные понятия

Методы решения неравенств.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	27.1, 27.3, 27.5			27.2, 27.4, 27.6
2	27.7, 27.9, 27.11	27.13		27.8, 27.10, 27.12, 27.14

Окончание

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
3	27.15, 27.17, 27.19	27.21	Самостоятельная работа № 27: № 1, 2, 3	27.16, 27.18, 27.20, 27.22

Методические комментарии

Как правило, для решения неравенств метод следствий не применим, поскольку проверка бесконечного множества посторонних решений трудно осуществима. Следовательно, всё внимание должно быть сосредоточено на методе равносильных переходов.

Особое внимание следует уделить решению нестрогих неравенств. Такое неравенство представляет собой совокупность, состоящую из строгого неравенства и уравнения. Если это не учесть, то возможна потеря решений, состоящих из корней уравнения. Поэтому самый безопасный путь — это записать совокупность и решить её.

Самым эффективным методом решения неравенств является метод интервалов. Существует среди учащихся распространённое заблуждение, что этот метод применим только к неравенствам, левая часть которых представляет собой многочлен или частное многочленов. Понятно, что это не так. Метод интервалов применим ко всем типам функций. Этот метод позволяет решения многих неравенств свести к решению соответствующих типов уравнений.

Комментарии к упражнениям

№ 27.17, 27.18. Воспользуйтесь методом интервалов.
№ 27.19—27.22. Воспользуйтесь свойствами ограниченности и монотонности функций, которые определяет левая и правая части неравенств.

Контрольная работа № 6

Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Тема. Показательная функция.
Показательные уравнения и неравенства

Вариант 1

1. Постройте график функции $y = |2^x - 4|$.

2. Решите уравнение:

1) $5^{x+2} - 5^x = 120$;
2) $9^x - 7 \cdot 3^x = 18$.

3. Решите уравнение:

1) $(6^{x-2})^{x+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^x \cdot 36^{x+3}$;

2) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$;

3) $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 6$.

5. Решите неравенство:

1) $0{,}2^{\frac{x^2-2x-24}{x-2}} \geqslant 0{,}0016$;

2) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 \geqslant 0$.

6. При каких значениях параметра a уравнение $4^x - (a+2)2^x + 4a - 8 = 0$ имеет единственное решение?

Вариант 2

1. Постройте график функции $y = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^x - 9\right|$.

2. Решите уравнение:

1) $4^{x+3} - 4^x = 63$;
2) $36^x - 4 \cdot 6^x = 12$.

3. Решите уравнение:

1) $(2^{x-5})^{x+3} = 0{,}5^x \cdot 8^{x-6}$;

2) $7 \cdot 81^x + 9 \cdot 49^x = 16 \cdot 63^x$;

3) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$.

5. Решите неравенство:

1) $0{,}3^{\frac{x^2+x-15}{x+3}} \geqslant 0{,}027$;

2) $5^{2x-1} - 2 \cdot 5^x - 75 \geqslant 0$.

6. При каких значениях параметра a уравнение $25^x - (a+8)5^x + a + 7 = 0$ имеет единственное решение?

Вариант 3

1. Постройте график функции $y = |3^x - 3|$.
2. Решите уравнение:
   1) $3^{x+2} - 3^x = 72$;
   2) $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$.
3. Решите уравнение:
   1) $(5^{x-6})^{x+1} = 0{,}2^x \cdot 25^{x+5}$;
   2) $5 \cdot 9^x + 3 \cdot 25^x = 8 \cdot 15^x$;
   3) $\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x + \left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x = 12$.
5. Решите неравенство:
   1) $0{,}9^{\frac{x^2+10x-22}{x-1}} \leqslant 0{,}81$;
   2) $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 \leqslant 0$.
6. При каких значениях параметра a уравнение
   $16^x - (a-2)4^x + 4a - 24 = 0$
   имеет единственное решение?

Вариант 4

1. Постройте график функции $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2\right|$.
2. Решите уравнение:
   1) $7^{x+2} - 7^x = 48$;
   2) $25^x - 3 \cdot 5^x = 10$.
3. Решите уравнение:
   1) $(3^{x+2})^{x-8} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 81^{x-9}$;
   2) $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x = 7 \cdot 10^x$;
   3) $\left(\sqrt{8+3\sqrt{7}}\right)^x + \left(\sqrt{8-3\sqrt{7}}\right)^x = 16$.
5. Решите неравенство:
   1) $0{,}5^{\frac{x^2+7x-15}{x+2}} \geqslant 0{,}125$;
   2) $4^{2x+1} - 17 \cdot 4^x + 4 \geqslant 0$.
6. При каких значениях параметра a уравнение
   $9^x - (a+4)3^x + 9a - 45 = 0$
   имеет единственное решение?

Контрольная работа № 2

Тема. Логарифмическая функция.
Логарифмические уравнения и неравенства.
Производные показательной и логарифмической функций

Вариант 1

1. Сравните $\log_{11} 12$ и $\log_{12} 11$.

2. Решите уравнение:

1) $\log_5(x-1)+\log_5(x+3)=1$;

2) $\log_6(x^2+5x-10)=\log_6(x+2)$;

3) $\dfrac{2\log_3 x}{\log_3(4x-3)}=1$;

4) $2\log_4(x-1)+\log_4(x-3)^2=0$.

3. Решите неравенство $\log_{0,3}(x+6)\geqslant\log_{0,3}(4-x)$.

4. Вычислите значение выражения $\dfrac{\log_4 8+\log_4 2}{2\log_3 12-\log_3 16}$.

5. Решите уравнение:

1) $\log_2 x+25\log_x 2=10$;

2) $x^{\log_2 5}+5^{\log_2 x}=50$.

6. Найдите множество решений неравенства $\log_3^2 x-2\log_3 x-3\geqslant 0$.

7. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)=e^{-7x}$ в точке с абсциссой $x_0=0$.

8. Постройте график функции $y=\sqrt{\lg\cos^2 x}$.

Вариант 2

1. Сравните $\log_7 8$ и $\log_8 7$.

2. Решите уравнение:

1) $\log_6(x+1)+\log_6(2x+1)=1$;

2) $\log_7(x^2-12x-4)=\log_7(8-x)$;

3) $\dfrac{2\log_5 x}{\log_5(6x-5)}=1$;

4) $2\log_6(x-3)+\log_6(x-5)^2=0$.

3. Решите неравенство $\log_{0,4}(x-5)\leqslant\log_{0,4}(7-x)$.

4. Вычислите значение выражения $\dfrac{\lg 300-\lg 3}{3\log_6 2+\log_6 27}$.

5. Решите уравнение:

1) $\log_5 x+\log_x 5=2$;

2) $x^{\log_3 6}+6^{\log_3 x}=12$.

6. Найдите множество решений неравенства $\log_2^2 x+4\log_2 x-5\geqslant 0$.

7. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = \ln(4x - 3)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.
8. Постройте график функции $y = \sqrt{\lg \sin^2 x}$.

Вариант 3

1. Сравните $\log_{14} 13$ и $\log_{13} 14$.
2. Решите уравнение:

   1) $\log_6(x-2) + \log_6(x-11) = 2$;
   2) $\log_8(x^2 + 2x - 9) = \log_8(x+3)$;
   3) $\dfrac{2\log_7 x}{\log_7(5x-4)} = 1$;
   4) $2\log_5(x-4) + \log_5(x-6)^2 = 0$.
3. Решите неравенство $\log_{0,5}(x+9) \geqslant \log_{0,5}(3-x)$.
4. Вычислите значение выражения $\dfrac{\log_6 18 + \log_6 2}{3\log_{32} 4 - \log_{32} 2}$.
5. Решите уравнение:
   1) $\log_7 x + 4\log_x 7 = 4$;
   2) $x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 x} = 162$.
6. Найдите множество решений неравенства $\log_4^2 x - 3\log_4 x + 2 \geqslant 0$.
7. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{\frac{x}{4}}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.
8. Постройте график функции $y = \sqrt{\log_{0,5}(1 + \sin^2 x)}$.

Вариант 4

1. Сравните $\log_{19} 18$ и $\log_{18} 19$.
2. Решите уравнение:

   1) $\log_4(x+3) + \log_4(x+15) = 3$;
   2) $\log_{11}(x^2 - 9x + 19) = \log_{11}(4-x)$;
   3) $\dfrac{2\log_{11} x}{\log_{11}(7x-6)} = 1$;
   4) $2\log_9(x-5) + \log_5(x-7)^2 = 0$.

4. Вычислите значение выражения $\dfrac{\log_7 98 - \log_7 2}{2\log_5 10 + \log_5 1{,}25}$.
5. Решите уравнение:
   1) $\log_3 x + 9\log_x 3 = 6$;
   2) $x^{\log_3 7} + 7^{\log_3 x} = 98$.
6. Найдите множество решений неравенства $\lg^2 x - \lg x - 2 \geqslant 0$.
7. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = \ln(5x+6)$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.
8. Постройте график функции $y = \sqrt{\log_{0,4}(1 + \cos^2 x)}$.

Контрольная работа № 3

Тема. Интеграл и его применение

Вариант 1

1. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 2) $\int\limits_{1}^{3} \left(\frac{1}{x^2} - 3x^2\right)dx.$

2. Найдите первообразную функции $f(x) = 4x^3 - 4x + 5$, график которой проходит через точку A (1; 6).

3. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(4\cos 4x + \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\right)dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \left(\frac{5}{\sqrt{5x+4}} - x\right)dx.$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 6 - x^2$ и $y = x + 4$.

5. Для функции $y = x^2 + 2x$ найдите такую первообразную, что прямая $y = 3x$ является касательной к её графику.

6. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = e$ и $x = e^4$.

7. Используя геометрический смысл интеграла, вычислите $\int\limits_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \sqrt{5 - x^2}\,dx.$

Вариант 2

1. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)dx.$

2. Найдите первообразную функции $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$, график которой проходит через точку M (1; –3).

3. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} + 4\sin 4x\right)dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}} + x\right)dx.$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 5 - x^2$ и $y = 3 - x$.

5. Для функции $y = x^2 + 1$ найдите такую первообразную, что прямая $y = 2x$ является касательной к её графику.

6. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = \ln 3$.

7. Используя геометрический смысл интеграла, вычислите $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2}\,dx$.

Вариант 3

1. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \left(6x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$.

2. Найдите первообразную функции $f(x) = 4x^3 + 8x - 2$, график которой проходит через точку A (1; 3).

3. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(2\sin 2x - \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\right)dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \left(\frac{8}{\sqrt{8x + 1}} - x\right)dx$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 4 - x^2$ и $y = x + 2$.

5. Для функции $y = x^2 - 3x$ найдите такую первообразную, что прямая $y = -2x$ является касательной к её графику.

6. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{\sin x}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

7. Используя геометрический смысл интеграла, вычислите $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

Вариант 4

1. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 2) $\int\limits_{1}^{4} \left(4x - \frac{1}{x^2}\right)dx$.

2. Найдите первообразную функции $f(x) = 3x^2 - 6x - 2$, график которой проходит через точку M (1; 4).

3. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} - 3\cos 3x\right)dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \left(\frac{7}{\sqrt{7x + 9}} + x\right)dx$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 2$ и $y = x + 4$.

5. Для функции $y = x^2 - 2$ найдите такую первообразную, что прямая $y = -x$ является касательной к её графику.

6. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{\cos x}$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{\pi}{6}$.

7. Используя геометрический смысл интеграла, вычислите $\int\limits_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$.

Контрольная работа № 4

Тема. Комплексные числа

Вариант 1

1. На координатной плоскости отметили начало координат O (0; 0) и точку A (2; 5). Задайте в алгебраической форме комплексное число, равное вектору $\overrightarrow{OA}$. Найдите модуль этого комплексного числа.
2. Вычислите: $\dfrac{(2+i)i-3}{i+1}$.
3. Найдите значение выражения z^7, если $z = -\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{7}\right) + i\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)$.
4. Решите уравнение $2z^2 + 5z + 4 = 0$ на множестве комплексных чисел.
5. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие условию $|1 + z - 2i| > 1$.
6. Изобразите на комплексной плоскости все числа, являющиеся корнями третьей степени из числа $z = -1 - \sqrt{3}i$.

Вариант 2

1. На координатной плоскости отметили начало координат O (0; 0) и точку B (–3; 1). Задайте в алгебраической форме комплексное число, равное вектору $\overrightarrow{OB}$. Найдите модуль этого комплексного числа.
2. Вычислите: $\dfrac{-8+4i}{-i(2-i)-1}$.
3. Найдите значение выражения z^5, если $z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{5}\right)\right)$.
4. Решите уравнение $3z^2 - 3z + 2 = 0$ на множестве комплексных чисел.
5. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие условию $|z - 2| = |z + i|$.
6. Изобразите на комплексной плоскости все числа, являющиеся корнями третьей степени из числа $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Вариант 3

1. На координатной плоскости отметили начало координат O (0; 0) и точку C (2; –4). Задайте в алгебраической форме комплексное число, равное вектору $\overrightarrow{ON}$. Найдите модуль этого комплексного числа.

2. Вычислите: $\dfrac{(2i-1)2i+4i}{1-i}$.

3. Найдите значение выражения z^6, если $z=\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$.

4. Решите уравнение $5z^2+7z+3=0$ на множестве комплексных чисел.

5. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие условию $|2i-3+z|\leqslant 3$.

6. Изобразите на комплексной плоскости все числа, являющиеся корнями третьей степени из числа $z=-1-i$.

Вариант 4

1. На координатной плоскости отметили начало координат O (0; 0) и точку D (–4; –1). Задайте в алгебраической форме комплексное число, равное вектору $\overrightarrow{OD}$. Найдите модуль этого комплексного числа.

2. Вычислите: $\dfrac{4-8i}{i+(2i+1)i}$.

3. Найдите значение выражения z^4, если $z=-3\left(\cos\dfrac{5\pi}{8}+i\sin\dfrac{5\pi}{8}\right)$.

4. Решите уравнение $2z^2+3z+3=0$ на множестве комплексных чисел.

5. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие условию $|3+4i|=|z-i|$.

6. Изобразите на комплексной плоскости все числа, являющиеся корнями третьей степени из числа $z=-1+i$.

Контрольная работа № 5

Тема. Элементы теории вероятностей

Вариант 1

1. О событиях A и B некоторого испытания известно, что $P(A) = 30\%$, $P(B) = 50\%$ и $P(A \cup B) = 80\%$. Найдите $P(A \cap B)$.
2. Найдите значение $P(x = 5)$ и дисперсию случайной величины x.

Значение x	2	3	5	10
Вероятность, %	5	40		15

3. Имеются два принтера, которые обслуживаются независимо один от другого. Вероятность того, что в определённый день в первом принтере закончится тонер, равна 3%, а во втором принтере — 1%. Найдите вероятность того, что в этот день можно будет пользоваться обоими принтерами.
4. Вероятность того, что лотерейный билет выигрышный, равна $0{,}5\%$. Чему равна вероятность того, что из 20 купленных лотерейных билетов по крайней мере два окажутся выигрышными? Сколько лотерейных билетов нужно купить, чтобы ожидаемое количество выигрышных билетов было больше одного?
5. В некоторой местности вероятность того, что наугад выбранный человек курит, равна 20%, а вероятность того, что наугад выбранный человек имеет сердечно-сосудистые заболевания, равна 30%. Известно, что среди людей, имеющих сердечно-сосудистые заболевания, в этой местности 60% курят. Найдите вероятность того, что наугад выбранный курильщик имеет сердечно-сосудистые заболевания.

Вариант 2

1. О событиях A и B некоторого испытания известно, что $P(A) = 0{,}4$, $P(A \cup B) = 0{,}9$ и $P(A \cap B) = 0{,}3$. Найдите $P(B)$.
2. Найдите значение $P(z = 0)$ и дисперсию случайной величины z.

Значение z	–2	0	1	4
Вероятность, %	30		20	40

3. В математических олимпиадах обычно участвует больше мальчиков, а в олимпиадах по иностранному языку — девочек. Вероятность того, что кто-то из мальчиков победит на олимпиаде по математике, равна 0,7, а на олимпиаде по иностранному языку — 0,35. Найдите вероятность того, что на обеих олимпиадах победу одержат девочки.
4. Вероятность того, что посетитель магазина совершит покупку, равна 40%. Какова вероятность того, что из 12 случайных посетителей магазина покупку совершат не меньше 10 людей? Сколько людей должны посетить магазин, чтобы ожидаемое количество покупок, совершённых ними, было не меньше 25?
5. Известно, что 80% выпускаемых мобильных телефонов имеют доступ к сети Интернет, а 70% — имеют сенсорный экран. Вероятность того, что наугад выбранный телефон с сенсорным экраном будет иметь доступ к сети Интернет, равна 96%. Найдите вероятность того, что наугад выбранный телефон с доступом в Интернет будет иметь сенсорный экран.

Вариант 3

1. О несовместных событиях A и B некоторого испытания известно, что $P(A) = 20\%$ и $P(A \cup B) = 75\%$. Найдите $P(B)$.
2. Найдите значение $P(y = 4)$ и дисперсию случайной величины y.

Значение y	2	3	4	8
Вероятность, %	10	70		20

3. В соревнованиях по стрельбе из лука участвуют два спортсмена. Первый спортсмен поражает мишень с вероятностью 92%, а второй спортсмен — с вероятностью 96%. Найдите вероятность того, что ни один из этих спортсменов не поразит мишень.
4. Вероятность того, что перепад напряжения приведёт к поломке электроприбора, равна 0,08. Какова вероятность, что из пяти разных случаев перепадов напряжения по крайней мере два раза придётся ремонтировать прибор? Сколько раз может произойти перепад напряжения в сети, чтобы ожидаемое количество случаев, повлекших ремонт прибора, не превысило трёх?
5. В автомате, предлагающем различные напитки, 45% продаж приходится на кофе, а в 60% случаев покупатель приобретает напиток с сахаром. Известно, что в 80% случаев покупки кофе в него добавляют

сахар. Найдите вероятность того, что покупатель, предпочитающий сладкий напиток, купит кофе.

Вариант 4

1. О событиях A и B некоторого испытания известно, что $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}7$ и $P(A \cap B) = 0{,}1$. Найдите $P(A \cup B)$.
2. Найдите значение $P(x = -3)$ и дисперсию ожидание случайной величины x.

Значение x	–3	–1	0	5
Вероятность, %		20	35	15

3. В двух коробках лежат только чёрные и белые шары. Вероятность того, что наугад выбранный из первой коробки шар окажется белым, равна 0,6. Вероятность того, что наугад выбранный из второй коробки шар окажется белым, равна 0,3. Из каждой коробки наугад выбирают по одному шару. Найдите вероятность того, что ни один из выбранных шаров не будет белым.
4. Стрелок попадает в мишень с вероятностью, равной 75%. Какова вероятность того, что из десяти попыток стрелок попадет в мишень меньше девять раз? Сколько выстрелов потребуется совершить стрелку, чтобы ожидаемое количество случаев попадания в мишень было не меньше 25?
5. В некоторой местности вероятность того, что наугад выбранный человек знает иностранный язык, равна 15%, а вероятность того, что наугад выбранный человек по профессии филолог, равна 10%. Известно, что среди людей, знающих иностранный язык, в этой местности 20% филологов. Найдите вероятность того, что наугад выбранный филолог знает иностранный язык.

Итоговая контрольная работа

Тема. Обобщение и систематизация знаний учащихся

Вариант 1

1. Решите уравнение:
1) $7^{x+1} - 2 \cdot 7^x + 5 \cdot 7^{x-1} = 280$;
2) $\log_5(5^x - 4) = 1 - x$;
3) $\log_3^2 x - 2\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x} = 2$.

2. Решите неравенство:
1) $2\log_5(-x) > \log_5(5 - 4x)$;
2) $\lg^2 10x - \lg x \geqslant 3$;
3) $\log_{x^2}(3x - 2) \geqslant 0$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции $f(x) = 4\ln(x + 2) - \frac{2}{3}x^2$.

4. Вычислите интеграл $\int\limits_{0,5}^{0} e^{2x+1}dx$.

5. В двух коробках хранятся шары. В первой коробке лежат 8 шаров, из которых 2 белых и 6 чёрных, а во второй — 6 шаров, из которых 5 белых и 1 чёрный. Из каждой коробки наугад вынули по одному шару. Какова вероятность того, что оба вынутых шара окажутся чёрными?

6. При каких значениях параметра a уравнение $\log_x(2a - 3x) = 2$? имеет решения?

Вариант 2

1. Решите уравнение:
1) $6^{x+2} - 4 \cdot 6^{x+1} + 8 \cdot 6^{x-1} = 80$;
2) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$;
3) $\log_2^2 x - \log_{0,5} x^3 = 4$.

2. Решите неравенство:
1) $2\log_3(-x) > \log_3(6 - x)$;
2) $\lg^2 10x + \lg x \geqslant 5$;
3) $\log_{x^2}(4x - 3) \leqslant 0$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции $f(x) = 3\ln(x - 1) - \frac{1}{4}x^2$.

4. Вычислите интеграл $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{3x-2}$.
5. Стрелок делает два независимых выстрела — сначала в первую мишень, потом во вторую. Вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень, составляет 70%, во вторую — 90%. Какова вероятность того, что стрелок попадёт только во вторую мишень?
6. При каких значениях параметра a уравнение $\log_x(4a - x) = 2$? имеет решения?

Вариант 3

1. Решите уравнение:
   1) $2^{x+4} - 5 \cdot 2^{x+2} + 9 \cdot 2^{x-1} = 16$;
   2) $\log_2(2^x - 2) = 3 - x$;
   3) $2\log_2^2 x - 3\log_{0,5} x^3 = 5$.
2. Решите неравенство:
   1) $2\log_{\frac{1}{3}}(-x) < \log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x)$;
   2) $\lg^2 100x - 5\lg x \geqslant 6$;
   3) $\log_{x^2}(6x - 5) \geqslant 0$.
3. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5\ln(x + 4)$.
4. Вычислите интеграл $\int\limits_{0,8}^{2} e^{5x-4}dx$.
5. Игральный кубик последовательно бросают два раза. Какова вероятность того, что только во второй раз на кубике выпадет количество очков, кратное трём?
6. При каких значениях параметра a уравнение $\log_x(3a - 4x) = 2$? имеет решения?

Вариант 4

1. Решите уравнение:
   1) $3^{x+3} - 20 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x-1} = 42$;
   2) $\log_7(7^x - 6) = 1 - x$;
   3) $\log_5^2 x + 8\log_{0,2} \sqrt[4]{x} = 8$.

2. Решите неравенство:

1) $2\log_{0,2}(-x) < \log_{0,2}(6-5x)$;

2) $\lg^2 1000x - 8\lg x \geqslant 12$;

3) $\log_{x^2}(7x-6) \leqslant 0$

3. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции $f(x) = \dfrac{1}{5}x^2 - 4\ln(x-3)$.

4. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{6x+7}$.

5. Физик-экспериментатор обстреливает пучком нейтронов две смеси изотопов Урана. Вероятность начала управляемой ядерной цепной реакции для первой смеси составляет 30%, а для второй смеси — 60%. Какова вероятность того, что управляемая ядерная цепная реакция начнётся только в первой смеси изотопов Урана?

6. При каких значениях параметра a уравнение $\log_x(a-5x) = 2?$ имеет решения?

Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся

Одним из направлений оценочной деятельности в соответствии с требованиями Стандарта является оценка образовательных достижений учащихся.

Система оценки достижения планируемых результатов по алгебре и началам математического анализа направлена на обеспечение качества математического образования. Она должна позволять отслеживать индивидуальную динамику развития учащихся, обеспечивать обратную связь для учителей, учащихся и родителей.

Формирование **личностных результатов** обеспечивается в ходе реализации всех компонентов образовательного процесса, включая внеурочную деятельность, реализуемую семьёй и школой.

Основным объектом оценки **личностных результатов** служит сформированность универсальных учебных действий, включаемых в следующие три основных блока:

1) сформированность основ *гражданской идентичности* личности;

2) готовность к переходу к *самообразованию на основе учебно-познавательной мотивации*, в том числе готовность к *выбору направления профильного образования*;

3) сформированность *социальных компетенций*, включая ценностно-смысловые установки и моральные нормы, опыт социальных и межличностных отношений, правосознание.

Основным объектом оценки **метапредметных результатов** является:

- способность и готовность к освоению систематических знаний по алгебре и началам математического анализа, их самостоятельному пополнению, переносу и интеграции;
- способность к сотрудничеству и коммуникации в ходе учебной и внеучебной деятельности;
- способность и готовность к использованию ИКТ в целях обучения и развития;
- способность к самоорганизации, саморегуляции и рефлексии.

Основным объектом оценки **предметных результатов** по алгебре и началам математического анализа в соответствии с требованиями Стандарта является способность к решению учебно-познавательных и учебно-практических задач, основанных на изучаемом учебном материале, с использованием способов действий, релевантных содержанию учебных предметов, в том числе метапредметных (познавательных, регулятивных, коммуникативных) действий.

Основными видами оценивания образовательных достижений по алгебре и началам математического анализа являются: *стартовое*, *текущее* и *итоговое*.

Стартовое оценивание позволяет учителю спланировать личностно-ориентированное обучение, индивидуализировать образовательный процесс.

Текущее оценивание позволяет определить: уровень усвоения нового материала, степень самостоятельности учащихся при решении задач, характер применения рациональных способов решения задач и др. Для текущего оценивания можно использовать следующие методы контроля.

Методы контроля в учебном процессе по математике

Устный контроль	**Письменный контроль**	**Практический контроль**
• Фронтальный опрос • Индивидуальный опрос	• Математический диктант • Самостоятельная работа • Контрольная работа • Реферат • Тест • Зачёт	• Фронтальная или индивидуальная практическая работа • Домашняя контрольная работа • Исследовательская работа • Проектная работа

Итоговое оценивание может проводиться после завершения темы, раздела, учебного курса основной или старшей школы (в частности, в виде итоговой аттестации). Итоговая оценка результатов освоения учащимися основной образовательной программы выставляется по результатам промежуточной и итоговой аттестации и формируется на основе:

• результатов внутришкольного мониторинга образовательных достижений по алгебре и началам математического анализа, зафиксированных в оценочных листах, в том числе за промежуточные и итоговые работы на межпредметной основе;

• оценок за выполнение итоговых работ по алгебре и началам математического анализа;

• оценки за выполнение и защиту индивидуального проекта;

• оценок за работы, выносимые на государственную итоговую аттестацию (ГИА) и единый государственный экзамен (ЕГЭ).

Одним из современных методов оценивания, рекомендуемых для использования в классах с углублённым изучением математики, является рейтинговая система.

При использовании рейтинговой системы оценки учителю необходимо определить виды учебной деятельности, которые подлежат проверке по каждой теме курса и максимальное количество баллов по каждому виду деятельности. Общее количество баллов определяется по каждому разделу курса в зависимости от количества часов, отведённых на её изучение, а также от объёма выполняемых задач. Данная система оценивания позволяет применять обязательные и дополнительные баллы. Обязательными баллами оцениваются результаты текущего и итогового контроля. Результаты выполнения творческих работ, учебных проектов и исследований, участие в олимпиадах можно оценивать дополнительными баллами.

Например, можно использовать рейтинговую 50-балльную шкалу.

Вид учебной деятельности	**Максимальное количество баллов**
Ответы на уроке	5
Индивидуальная работа	10
Проверочная работа	15
Домашняя работа	10
Зачётная работа	15
Контрольная работа	20
Творческая работа	25
Участие в олимпиадах	30
Проектная работа	50
Исследовательская работа	50

Шкала перевода рейтинговых баллов в 5-бальную систему оценивания.

Рейтинговый балл, (% от общей суммы баллов)	**Оценка**
85—100	5
70—84	4
55—69	3
< 55	2

Рейтинговая система позволяет:

• определить уровень подготовки учащихся по алгебре на любом этапе учебного процесса;

• контролировать индивидуальную работу учащихся на уроке и во внеурочной деятельности;

• наиболее объективно оценивать знания учащихся;

• стимулировать развитие познавательного интереса к предмету;

• развивать математическую компетенцию;

• создать условия, учитывающие индивидуальные способности учащихся, для успешной реализации целей обучения.

Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся

ИКТ-компетентность учащихся — умение самостоятельно работать с информацией, способность решать учебно-познавательные задачи, используя средства ИКТ.

ИКТ-компетентность учителя — умение, способность и готовность решать профессиональные задачи, используя распространённые в данной профессиональной области средства ИКТ.

С целью формирования ИКТ-компетентности учащихся при обучении алгебре и началам математического анализа использовать средства ИКТ можно:

- на уроках алгебры и начал математического анализа;
- во внеурочной деятельности;
- в учебно-исследовательской и проектной деятельности;
- при измерении, контроле и оценке планируемых результатов.

Для того чтобы значительно расширить дидактические возможности урока математики, учитель может использовать следующие средства ИКТ: мультимедийные фрагменты теоретических материалов, электронные дидактические материалы, моделирование геометрических фигур, готовые программные продукты (компьютерные тренажёры, интерактивные курсы, коллекции ЭОР и др.). В помощь учителю предлагаем технологическую карту урока, на котором используются ИКТ.

Для успешного осуществления внеурочной, учебно-исследовательской и проектной деятельности учащиеся осуществляют поиск необходимой информации в сети Интернет, работу с электронными учебниками и приложениями к ним, создают и редактируют компьютерные презентации, веб-страницы.

Использование средств ИКТ при обучении алгебре и началам математического анализа способствует:

- повышению интереса к предмету, мотивации обучения, познавательного интереса;
- расширению возможностей использования источников информации;
- созданию возможностей для дифференцированного, индивидуального и личностно-ориентированного обучения;
- повышению эффективности анализов результатов обучения.

Применение средств ИКТ в обучении алгебре и началам математического анализа формирует ИКТ-компетентность учащихся, в результате чего учащийся научится:

• использовать калькулятор для вычислений;

• осуществлять редактирование и структурирование текста, используя средства текстового редактора;

• создавать и редактировать таблицы, используя средства текстового редактора и редактора таблиц;

• создавать различные геометрические объекты с использованием возможностей специальных инструментов компьютерных программ;

• создавать графические объекты;

• осуществлять поиск информации в Интернете;

• соблюдать требования техники безопасности при работе с устройствами ИКТ.

Технологическая карта урока № ___

Тема урока	______________________________
Тип урока	______________________________
Формируемые результаты	Предметные: ______________________ Личностные: ______________________ Метапредметные: ___________________
Планируемые результаты	______________________________ ______________________________
Основные понятия	______________________________ ______________________________
Средства ИКТ, используемые на уроке	______________________________ ______________________________ ______________________________
Программное обеспечение	______________________________ ______________________________
Образовательные интернет-ресурсы	______________________________ ______________________________ ______________________________

Организационная структура урока

Этапы проведения урока	Форма организации УД	Задания, выполнение которых приведёт к достижению планируемых результатов			Средства ИКТ
		Учебник	Рабочая тетрадь	Дидактические материалы	
1. Организационный этап					
2. Постановка формируемых результатов и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся					
3. Актуализация знаний					
4. Изучение нового материала					
5. Первичное закрепление нового материала					
6. Итоги урока					
7. Информация о домашнем задании					

Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся

Проект — это вид учебной деятельности, направленный на решение конкретной учебно-познавательной проблемы, с заранее запланированным результатом.

Учебно-исследовательская работа — это решение исследовательской задачи с заранее неизвестным результатом, представляющее собой самостоятельную, творческую работу, имитирующую настоящее научное исследование (в частности, учащиеся учатся выдвигать гипотезы и предлагать способы их проверки, планировать и работать по плану, искать оптимальные и нестандартные решения поставленной задачи и др.).

Учебно-исследовательская и проектная деятельность на уроках алгебры и начал математического анализа направлена:

- на повышение интереса учащихся к предмету, мотивации учебной деятельности, развитие познавательной деятельности;
- развитие коммуникативных умений;
- формирование исследовательских умений: выявлять проблему, ставить цели и задачи исследования, выдвигать гипотезы;
- формирование умений осуществлять планирование, самоконтроль, рефлексию и самоанализ своей деятельности.

При выполнении учебных проектов по алгебре и началам математического анализа учащийся научится:

- анализировать фрагменты работ учёных-математиков;
- описывать историю математических открытий;
- оценивать вклад выдающихся учёных-математиков в развитие науки;
- представлять результаты измерений с помощью таблиц, графиков и выявлять на этой основе эмпирические зависимости;
- рассматривать практические приложения математических знаний;
- применять математические знания в быту и в технике;
- анализировать связь алгебры и начал математического анализа с другими естественными науками.

Критерии оценки проектной и учебно-исследовательской деятельности учащихся

1. Обоснование проблемы проекта (исследования) и планирование способов её решения.

2. Постановка целей и задач исследования, глубина раскрытия темы проекта (исследования).

3. Вариативность представленных источников информации, методов исследования, целесообразность их использования.

4. Анализ хода работы, формулировка выводов и оценок, выявление перспектив дальнейшего исследования.

5. Оригинальность высказанных идей, реализация рациональных и нестандартных решений.

6. Оформление проектного продукта (результатов исследования), качество проведения презентации.

7. Практическая направленность полученных результатов.

При оценке проекта (исследования) следует оценивать, прежде всего, качество работы в целом, а также проявленные при этом умения проектировать учебную деятельность. Отметим, что учитель может устанавливать и другие критерии на основе своего опыта и математической подготовки учащихся.

Технология организации проведения
учебно-исследовательской и проектной деятельности

План организации проектной деятельности

(Рекомендации для учителя)

Название проекта ______________________________

Цели проекта ______________________________

Планируемые результаты
Предметные: ______________________________
Личностные: ______________________________
Метапредметные: ______________________________

Общая характеристика проекта

Тип проекта ______________________________

Виды деятельности учащихся ______________________________
____

Форма организации ______________________________

Продолжительность выполнения ______________________________
____

Результат (продукт) деятельности ______________________________
____

План реализации проекта

Этапы	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
1. Организация деятельности			
Погружение в проект	Определение темы и целей проекта. Формирование групп (группы)	Обсуждают темы проекта в группе (группах) и с учителем	Мотивирует учащихся на проектную деятельность. Рассказывает, что такое проект и метод проектов. Помогает в постановке проблемы. Помогает сформировать группу (группы)
Планирование	Определение объёма работ для каждой группы (членов группы). Составление плана работы: определение источников информации; определение способов сбора данных; определение способа представления результата; определение критериев и регламента оценки работы	Распределяют обязанности внутри группы. Каждая группа выбирает тему работы и источники информации. Составляют план работы над проектом. Вырабатывают критерии регламента и оценки работы	Оказывает необходимую организационную и консультационную помощь
2. Осуществление деятельности			
Сбор информации	Сбор информации различными методами: опроса, наблюдения,	Выполняют работу над проектом	Помогает в изучении информации. Наблюдает, советует.

Окончание

Этапы	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
	изучения документации и т. д.		Анализирует групповые взаимоотношения
Обобщение результатов, выводы	Анализ полученной информации, подготовка к её представлению	Анализируют полученную информацию, выполняют оформление проектной работы	Контролирует, наблюдает, советует
3. Представление результатов и их оценка			
Презентация	Отчёт участников проекта о проделанной работе	Представляют проект	Слушает, при необходимости задаёт вопросы, обобщает, комментирует выступления
Оценка процесса и результатов работы	Оценка конечного результата коллективной деятельности. Анализ достижения поставленной цели. Рефлексия	Оценивают работу каждого члена группы (каждой группы). Анализируют, была ли достигнута поставленная цель. Проводят рефлексию своей деятельности (см. бланк рефлексии)	Участвует в коллективном анализе и оценке результатов проекта. Проводит рефлексию. Оценивает свою деятельность по педагогическому руководству деятельности детей

Карта оценки проектной деятельности

Название проекта ____________________________________

Группа ____________________________________

Параметры	Самооценка*	Взаимооценка*	Оценка учителя*	Средний балл
Выполнение работы по проекту				
Математическая точность				
Оформление результатов проекта				
Качество представления результатов (анализ выступления)				
Итоговый балл				

* Оценивается по пятибалльной системе.

Бланк рефлексии

Вопрос	Ответ
1. Понравилось ли вам участвовать в проектной деятельности?	
2. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым интересным?	
3. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым сложным? Почему?	
4. Какие знания вы получили в ходе работы над проектом?	
5. Довольны ли вы своим участием в работе группы (если нет, то почему)?	
6. Как вы оцените взаимоотношения в вашей группе во время работы над проектом?	

Содержание

От авторов 3

Примерное поурочное планирование учебного материала 5

Организация учебной деятельности 9

Глава 1. Показательная и логарифмическая функции 9

Глава 2. Интеграл и его применение 25

Глава 3. Комплексные числа 32

Глава 4. Элементы теории вероятностей 41

Глава 5. Повторение 59

Контрольные работы 64

Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся 79

Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся 83

Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся . . . 86