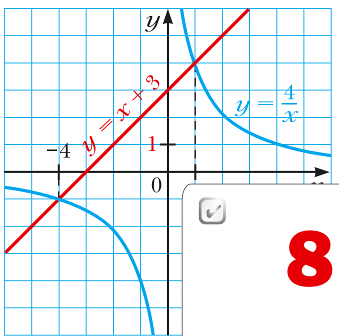
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

8 класс

Алгебра

А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

Алгебра



8 класс

Учебник

Под редакцией В. Е. Подольского

7-е издание, стереотипное

Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации

Москва
«Просвещение»
2022

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.141я721
М52

Под редакцией профессора кафедры математического анализа
механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова,
доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

Издание выходит в pdf-формате.

Мерзляк, Аркадий Григорьевич.

М52 Алгебра. 8 класс : учебник : издание в pdf-формате / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир ; под ред. В. Е. Подольского. — 7-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. — 255, [1] с. : ил.

ISBN 978-5-09-101252-1 (электр. изд.). — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-088564-5 (печ. изд.).

Учебник предназначен для изучения алгебры в 8 классе общеобразовательных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позволяющая формировать у школьников познавательный интерес к алгебре.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.141я721

Учебное издание

Мерзляк Аркадий Григорьевич
Полонский Виталий Борисович, **Якир** Михаил Семёнович

Алгебра

8 класс

Учебник

Центр математики
Ответственный за выпуск *П. А. Бессарабова*
Редактор *Н. В. Самсонова*. Художественный редактор *Е. В. Чайко*
Макет, внешнее оформление *Е. В. Чайко*
Рисунки *А. И. Крысова*. Компьютерная вёрстка *О. В. Поповой*
Технический редактор *С. А. Толмачева*
Корректоры *О. Ч. Кохановская, А. С. Цибулина*

Подписано в печать 12.08.2021. Формат 70×90/16. Гарнитура NewBaskerville
Усл. печ. л. 18,72. Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация,
127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru**.

ISBN 978-5-09-101252-1 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-088564-5 (печ. изд.)

От авторов

Дорогие восьмиклассники!

В этом учебном году вы продолжите изучение алгебры. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями, и этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделён на три главы, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. **Жирным** шрифтом напечатаны тексты определений, теорем, математические термины. *Курсивом* напечатаны отдельные слова или предложения, важные для понимания текста.

Обычно изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать лишь после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно те, которые обозначены звёздочкой). Свои знания можно проверить, решая задачи в тестовой форме из рубрики «Проверьте себя».

Каждый параграф завершает особая рубрика, которую мы назвали «Учимся делать нестандартные шаги». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные знания по алгебре, а лишь здравый смысл, изобретательность и смекалка. Они помогут вам научиться принимать неожиданные и нестандартные решения не только в математике, но и в жизни.

Если после выполнения домашних заданий останется свободное время и вы захотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, непростой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

○ Простые задачи

○○ Задачи среднего уровня сложности

✧ Сложные задачи

✵ Задачи высокой сложности

Задачи, которые можно решать с помощью компьютера

◄ Окончание доказательства теоремы, решения задачи

340 Задания, рекомендуемые для домашней работы

310 Задания, рекомендуемые для устной работы

Глава 1. Рациональные выражения

В этой главе вы познакомитесь с дробями, числитель и знаменатель которых — выражения с переменными; научитесь складывать, вычитать, умножать и делить такие дроби; познакомитесь с уравнениями, составленными с помощью этих дробей.

Вы узнаете, с помощью каких правил можно заменить данное уравнение более простым.

Вы расширите свои представления о понятии «степень», научитесь возводить числа в степень с целым отрицательным показателем.

Вы научитесь строить математические модели процессов, в которых увеличение (уменьшение) одной величины в несколько раз приводит к уменьшению (увеличению) другой величины в то же количество раз.

§ 1. Рациональные дроби

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить содержание п. 1 на с. 228 и п. 6 на с. 230.

В курсе алгебры 7 класса были рассмотрены целые выражения, то есть выражения, которые составлены из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления на отличное от нуля число.

Вот примеры целых выражений: $x - y$, $\frac{a+b}{5}$, $m^2 + 2m + n^2$, $\frac{1}{3}x - 4$, $\frac{c}{4} + \frac{d}{7}$, $x : 5$, y, 7.

В 8 классе мы рассмотрим **дробные выражения**.

Дробные выражения отличаются от целых тем, что они *содержат деление на выражение с переменными*.

Приведём примеры дробных выражений: $2x + \frac{a}{b}$, $(x - y) : (x + y)$, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, $\frac{5}{x}$.

Целые и дробные выражения называют **рациональными выражениями**.

Если в рациональном выражении заменить переменные числами, то получим числовое выражение. Однако *эта замена возможна только тогда, когда она не приводит к делению на нуль.*

Например, выражение $2+\frac{a+2}{a-1}$ при $a = 1$ не имеет смысла, то есть числового значения этого выражения при $a = 1$ не существует. При всех других значениях a это выражение имеет смысл.

Определение

Допустимыми значениями переменных, входящих в рациональное выражение, называют все значения переменных, при которых это выражение имеет смысл.

Например, в рассмотренном выше выражении допустимыми значениями переменной a являются все числа, кроме 1.

Допустимыми значениями переменных, входящих в целое выражение, являются все числа.

Отдельным видом рационального выражения является **рациональная дробь**. Это дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены[1]. Так, рациональные выражения

$$\frac{x}{7},\ \frac{x^2-2xy}{x+y},\ \frac{12}{a},\ \frac{a+b}{5}$$

являются примерами рациональных дробей.

Отметим, что рациональная дробь может быть как целым выражением, так и дробным.

Знаменатель рациональной дроби не может быть **нулевым многочленом**, то есть многочленом, тождественно равным нулю.

Допустимыми значениями переменных, входящих в рациональную дробь, являются все те значения переменных, при которых значение знаменателя дроби не равно нулю.

Схема на рисунке 1 иллюстрирует связь между понятиями, которые рассматриваются в этом параграфе.

Пример. Найдите допустимые значения переменной, входящей в выражение $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-5}$.

Решение. Дробь $\frac{1}{x}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме $x = 0$, а дробь $\frac{3}{x-5}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме $x = 5$.

Следовательно, искомыми допустимыми значениями переменной являются все числа, отличные от 0 и 5. ◄

---

[1] Напомним, что числа и одночлены считают отдельными видами многочленов (см. п. 6 на с. 230).

Рис. 1

1. Чем отличаются дробные выражения от целых?
2. Как вместе называют целые и дробные выражения?
3. Какие значения переменных называют допустимыми?
4. Какие дроби называют рациональными?
5. Отдельным видом каких выражений являются рациональные дроби?
6. Какой многочлен не может быть знаменателем рациональной дроби?

Упражнения

1. Какие из выражений $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4}+\frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a-\frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2-6t+15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$, $(y-4)^3+\frac{1}{y}$, $\frac{m^2-3mn}{18}$ являются:

1) целыми выражениями; 2) дробными выражениями; 3) рациональными дробями?

2. Чему равно значение дроби $\frac{c^2-4c}{2c+1}$, если:

1) $c=-3$; 2) $c=0$?

3. Найдите значение выражения $\frac{2m-n}{3m+2n}$, если:

1) $m=-1$, $n=1$; 2) $m=4$, $n=-5$.

4. Чему равно значение выражения:

1) $\frac{a^2-1}{a-5}$ при $a=-4$; 2) $\frac{x+3}{y}-\frac{y}{x+2}$ при $x=-5$, $y=6$?

5. Найдите допустимые значения переменной, входящей в выражение:

1) $2x - 5$;
2) $\frac{18}{m}$;
3) $\frac{9}{x-5}$;
4) $\frac{x-5}{9}$;
5) $\frac{2+y}{1+y}$;
6) $\frac{1}{x^2+4}$;
7) $\frac{5}{x^2-4}$;
8) $\frac{5}{|x|-4}$;
9) $\frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x+1}$;
10) $\frac{x+4}{x(x-6)}$;
11) $\frac{x}{|x|+1}$;
12) $\frac{x^2}{(x-3)(x+5)}$.

6. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\frac{9}{y}$;
2) $\frac{x+7}{x+9}$;
3) $\frac{m-1}{m^2-9}$;
4) $\frac{x}{|x|-3}$;
5) $\frac{4}{x-8} + \frac{1}{x-1}$;
6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$?

7. Запишите рациональную дробь, которая содержит переменную x и имеет смысл при всех значениях x, кроме:
1) $x = 7$; 2) $x = -1$; 3) $x = 0$ и $x = 4$.

8. Запишите рациональную дробь, содержащую переменную y, допустимыми значениями которой являются:
1) все числа, кроме 5;
2) все числа, кроме –2 и 0;
3) все числа, кроме 3, –3 и 6;
4) все числа.

9. Автомобиль проехал по шоссе a км со скоростью 75 км/ч и по грунтовой дороге b км со скоростью 40 км/ч. За какое время автомобиль проехал весь путь? Составьте выражение и найдите его значение при $a = 150$, $b = 20$.

10. Ученик купил ручки по 58 р., заплатив за них m р., и по 45 р., заплатив за них n р. Сколько ручек купил ученик? Составьте выражение и найдите его значение при $m = 174$, $n = 180$.

11. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение дроби:

1) $\frac{1}{x^2}$ положительное;
2) $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}$ отрицательное.

12. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение дроби:

1) $\frac{-x^2}{x^2+5}$ неположительное;
2) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$ неотрицательное.

13. Известно, что $5x - 15y = 1$. Найдите значение выражения:

1) $x - 3y$;
2) $\frac{8}{2x-6y}$;
3) $\frac{18y-6x}{9}$;
4) $\frac{1}{x^2-6xy+9y^2}$.

14. Известно, что $4a + 8b = 10$. Найдите значение выражения:

1) $2b + a$; 2) $\dfrac{5}{a + 2b}$; 3) $\dfrac{a^2 + 4ab + 4b^2}{2a + 4b}$.

15. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{1}{4 - \dfrac{4}{x}}$; 2) $y = \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{x}}$.

16. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\dfrac{x}{x - \dfrac{9}{x}}$; 2) $\dfrac{10}{2 + \dfrac{6}{x}}$?

Готовимся к изучению новой темы

17. Сократите дробь:

1) $\dfrac{5}{15}$; 2) $\dfrac{12}{18}$; 3) $\dfrac{27}{45}$; 4) $\dfrac{30}{48}$.

18. Приведите дробь:

1) $\dfrac{3}{7}$ к знаменателю 14; 2) $\dfrac{8}{15}$ к знаменателю 60.

19. Представьте в виде степени с основанием a выражение:
1) a^5a^3; 2) $(a^5)^3$; 3) $a^5 : a^3$; 4) $(a^8)^4 : (a^2)^8$.

20. Разложите на множители:
1) $6a - 15b$; 5) $a^6 + a^2$;
2) $2a + ab$; 6) $12m^2n - 4mn$;
3) $7am + 7bn$; 7) $2x^2 - 4x^3 + 10x^4$;
4) $4x^2 - 12xy$; 8) $10a^3b^2 - 15a^2b + 25ab^2$.

21. Представьте в виде произведения выражение:
1) $ab - ac + bd - cd$; 3) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$;
2) $3m + 3n - mx - nx$; 4) $8a^2b - 2a^2 - 4b^2 + b$.

22. Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена:
1) $a^2 - 8a + 16$; 3) $40xy + 16x^2 + 25y^2$;
2) $9x^2 + 6x + 1$; 4) $a^8 - 4a^4b + 4b^2$.

23. Разложите на множители:
1) $x^2 - 9$; 4) $a^2b^2 - 81$; 7) $c^3 - d^3$;
2) $25 - 4y^2$; 5) $100m^6 - 1$; 8) $a^3 + 8$;
3) $36m^2 - 49n^2$; 6) $a^{10} - b^6$; 9) $27m^6 - n^9$.

24. Разложите на множители:
1) $7a^2 - 7$; 3) $2x^3 - 2xy^2$; 5) $x - 4y + x^2 - 16y^2$;
2) $3b^3 - 3b$; 4) $-8a^5 + 8a^3 - 2a$; 6) $ab^6 - ab^4 - b^6 + b^4$.

25. Какое из равенств является тождеством:

1) $3x^2 - 36xy + 108y^2 = 3(x - 6y)^2$;

2) $4m^3 - 500n^6 = 4(m - 5n)(m^2 - 5mn + 25n^2)$?

Повторите содержание п. 2 на с. 228.

Учимся делать нестандартные шаги

26. Даны два числа: $a = \underbrace{44...4}_{m \text{ цифр}}$, $b = \underbrace{33...3}_{n \text{ цифр}}$. Можно ли подобрать такие m и n, чтобы:

1) число a было делителем числа b;

2) число b было делителем числа a?

§ 2. Основное свойство рациональной дроби

Равенство $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ является тождеством, так как оно выполняется при любых значениях a.

Равенство $\frac{3a - 1 + 2a + 5}{a + 1} = \frac{5a + 4}{a + 1}$ также естественно считать тождеством. Но оно выполняется не при любых значениях a. При $a = -1$ рациональные дроби, входящие в данное равенство, не имеют смысла.

Уточним принятые в 7 классе определение тождественно равных выражений и определение тождества.

Определение

Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.

Определение

Равенство, которое выполняется при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.

Например, равенство $\frac{a - 2}{a - 2} = 1$ является тождеством, так как оно выполняется при всех допустимых значениях a, то есть при всех a, кроме $a = 2$.

В 7 классе рассматривались тождественные преобразования целых выражений. Теперь рассмотрим тождественные преобразования дробных выражений.

Как вы знаете, основное свойство отношения выражается следующим равенством:

$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, где a, b и m — некоторые числа, причём $b \neq 0$ и $m \neq 0$.

Рациональные дроби обладают свойством, аналогичным основному свойству отношения.

Если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной.

Это свойство называют **основным свойством рациональной дроби** и записывают:

$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$, где A, B и C — многочлены, причём многочлены B и C ненулевые.

В соответствии с этим свойством выражение $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ можно заменить тождественно равной ему дробью $\frac{A}{B}$. Такое тождественное преобразование называют **сокращением дроби** на множитель C.

Пример 1. Сократите дробь: 1) $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$; 2) $\frac{3x + 15y}{3x}$; 3) $\frac{y^2 + 4y + 4}{y^2 + 2y}$.

Решение. 1) Одночлены $6a^3b^2$ и $24a^2b^4$ имеют общий множитель $6a^2b^2$. Тогда можно записать:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4} = \frac{a \cdot 6a^2b^2}{4b^2 \cdot 6a^2b^2} = \frac{a}{4b^2}.$$

2) Разложим числитель данной дроби на множители:

$$\frac{3x + 15y}{3x} = \frac{3(x + 5y)}{3x}.$$

Следовательно, числитель и знаменатель данной дроби имеют общий множитель 3, сократив на который получаем:

$$\frac{3(x + 5y)}{3x} = \frac{x + 5y}{x}.$$

3) Разложив предварительно числитель и знаменатель данной дроби на множители и сократив на общий множитель $y + 2$, получаем:

$$\frac{y^2 + 4y + 4}{y^2 + 2y} = \frac{(y + 2)^2}{y(y + 2)} = \frac{y + 2}{y}. ◄$$

Из основного свойства дроби следует, что

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B} \text{ и } \frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}.$$

Каждую из дробей $\frac{-A}{B}$ и $\frac{A}{-B}$ можно записать в виде выражения $-\frac{A}{B}$, то есть

$$\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}.$$

Пример 2. Сократите дробь $\frac{4a-20}{5a-a^2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{4a-20}{5a-a^2}=\frac{4(a-5)}{a(5-a)}=\frac{4(a-5)}{-a(a-5)}=-\frac{4}{a}. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Приведите:

1) дробь $\frac{a^2}{5bc^3}$ к знаменателю $15ab^3c^5$;

2) дробь $\frac{a}{a+2b}$ к знаменателю a^2-4b^2;

3) дробь $\frac{a-b}{2a-3b}$ к знаменателю $3b-2a$.

Решение. 1) Поскольку $15ab^3c^5=5bc^3\cdot 3ab^2c^2$, то новый знаменатель отличается от знаменателя данной дроби множителем $3ab^2c^2$. Следовательно, числитель и знаменатель данной дроби надо умножить на **дополнительный множитель** $3ab^2c^2$. Имеем:

$$\frac{a^2}{5bc^3}=\frac{a^2\cdot 3ab^2c^2}{5bc^3\cdot 3ab^2c^2}=\frac{3a^3b^2c^2}{15ab^3c^5}.$$

2) Запишем: $\frac{a}{a+2b}=\frac{a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)}=\frac{a^2-2ab}{a^2-4b^2}$.

3) Умножив числитель и знаменатель данной дроби на число -1, получаем:

$$\frac{a-b}{2a-3b}=\frac{(a-b)\cdot(-1)}{(2a-3b)\cdot(-1)}=\frac{b-a}{3b-2a}. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{2m}{9a^2b^6}$ и $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$; 2) $\frac{1}{a+b}$ и $\frac{1}{a-b}$; 3) $\frac{4a^2}{a^2-36}$ и $\frac{6}{a^2+6a}$.

Решение. 1) Можно принять за общий знаменатель данных дробей произведение их знаменателей, равное $54a^6b^9$. Однако удобнее в качестве общего знаменателя взять одночлен $18a^4b^6$, сконструированный таким образом: его коэффициент 18 является наименьшим общим кратным коэффициентов 9 и 6 данных знаменателей, а каждая из переменных a и b взята в степени с наибольшим показателем степени из тех, с которыми она входит в знаменатели данных дробей.

Поскольку $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$, то дополнительным множителем для дроби $\frac{2m}{9a^2b^6}$ является одночлен $2a^2$. Учитывая, что $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3b^3$, получаем, что дополнительным множителем для дроби $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$ является одночлен $3b^3$.

Следовательно, $\frac{2m}{9a^2b^6} = \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6}$;

$$\frac{5n^2}{6a^4b^3} = \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}.$$

2) Здесь за общий знаменатель следует принять выражение, равное произведению знаменателей данных дробей. Имеем:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2},$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) Для нахождения общего знаменателя рациональных дробей полезно предварительно разложить их знаменатели на множители:

$$a^2 - 36 = (a+6)(a-6), \qquad a^2 + 6a = a(a+6).$$

Следовательно, общим знаменателем данных дробей может служить выражение $a(a+6)(a-6)$.

Тогда $\frac{4a^2}{a^2-36} = \frac{4a^2}{(a+6)(a-6)}^{\backslash a} = \frac{4a^3}{a(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a^3-36a}$;

$$\frac{6}{a^2+6a} = \frac{6}{a(a+6)}^{\backslash a-6} = \frac{6(a-6)}{a(a+6)(a-6)} = \frac{6a-36}{a^3-36a}. ◄$$

<u>**Пример 5.**</u> Постройте график функции $y = \frac{x^2-1}{x-1}$.

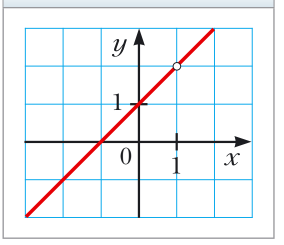
Решение. Данная функция определена при всех значениях x, кроме 1. Имеем:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1, \text{ то есть } y = x + 1,$$

где $x \neq 1$.

Следовательно, искомым графиком являются все точки прямой $y = x + 1$, за исключением одной точки, абсцисса которой равна 1 (рис. 2). ◄

Рис. 2



Пример 6. Для каждого значения a решите уравнение $(a^2 - 9)x = a + 3$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $(a + 3)(a - 3)x = a + 3$ и рассмотрим три случая.

1) $a = 3$.

Тогда получаем уравнение $0x = 6$, которое не имеет корней.

2) $a = -3$.

В этом случае получаем уравнение $0x = 0$, корнем которого является любое число.

3) $a \neq 3$ и $a \neq -3$.

Тогда $x = \dfrac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \dfrac{1}{a-3}$.

Ответ: если $a = 3$, то уравнение не имеет корней; если $a = -3$, то корнем является любое число; если $a \neq 3$ и $a \neq -3$, то $x = \dfrac{1}{a-3}$. ◄

1. Какие выражения называют тождественно равными?

2. Что называют тождеством?

3. Сформулируйте основное свойство рациональной дроби.

Упражнения

27. Какому из приведённых выражений тождественно равна дробь $\dfrac{6a^2}{24a}$:

1) $\dfrac{a^2}{4}$; 2) $\dfrac{a}{4}$; 3) $\dfrac{12a^3}{48a}$; 4) $\dfrac{3a^4}{12a^2}$?

28. Является ли тождеством равенство:

1) $\dfrac{3m^2}{7m} = \dfrac{3m}{7}$; 3) $\dfrac{2b}{5c^3} = \dfrac{8b}{20c^5}$;

2) $\dfrac{4x^8}{16x^4} = \dfrac{x^2}{4}$; 4) $\dfrac{8m^2}{9n} = \dfrac{8m^5}{9nm^3}$?

29. Сократите дробь:

1) $\dfrac{14a^3}{21a}$; 3) $\dfrac{5x}{20x}$; 5) $\dfrac{4abc}{16ab^4}$; 7) $\dfrac{-10n^{10}}{5n^4}$;

2) $\dfrac{8b^3c^2}{12bc^3}$; 4) $\dfrac{24x^2y^2}{32xy}$; 6) $\dfrac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$; 8) $\dfrac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$.

30. Представьте частное в виде дроби и сократите полученную дробь:

1) $6a : (18a^5)$; 2) $16b^7 : (48b^4)$; 3) $35a^8b^6 : (-49a^6b^8)$.

31. Сократите дробь:

1) $\dfrac{3x}{21y}$; 3) $\dfrac{5c^4}{10c^5}$; 5) $\dfrac{16ab^4}{40ab^2}$; 7) $\dfrac{12a^8}{-42a^2}$;

2) $\dfrac{5x^2}{6x}$; 4) $\dfrac{2m^4}{m^3}$; 6) $\dfrac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$; 8) $\dfrac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$.

32. Упростите выражение:

1) $\frac{-a}{-b}$; 2) $-\frac{-a}{b}$; 3) $-\frac{a}{-b}$; 4) $-\frac{-a}{-b}$.

33. Восстановите равенства:

1) $\frac{a}{3} = \frac{}{6a} = \frac{}{9a^3} = \frac{}{15b} = \frac{4a^2c^3}{}$;

2) $\frac{m}{n} = \frac{4m}{} = \frac{}{2n^2} = \frac{}{mnp} = \frac{3m^4n^3}{}$.

34. Приведите дробь:

1) $\frac{a}{b^3}$ к знаменателю b^5;

2) $\frac{m}{9n}$ к знаменателю $27n^4$;

3) $\frac{6}{7x^2y}$ к знаменателю $35x^3y^2$;

4) $\frac{5k}{6p^5}$ к знаменателю $24p^9c$.

35. Приведите дробь:

1) $\frac{x}{y^2}$ к знаменателю y^8;

2) $\frac{a}{3b}$ к знаменателю $6b^3$;

3) $\frac{9}{4m^2n}$ к знаменателю $12m^3n^2$;

4) $\frac{11c}{15d^6}$ к знаменателю $30bd^7$.

36. Сократите дробь:

1) $\frac{a(x+2)}{b(x+2)}$;

2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$;

3) $\frac{c^3(c-4)^5}{c^6(c-4)^3}$;

4) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$;

5) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$;

6) $\frac{4a-20b}{12ab}$;

7) $\frac{6x+12}{6x}$;

8) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$;

9) $\frac{y^2-25}{10+2y}$;

10) $\frac{a^2+4a+4}{9a+18}$;

11) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$;

12) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$.

37. Сократите дробь:

1) $\frac{a-b}{2(b-a)}$;

2) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$;

3) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$;

4) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$;

5) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$;

6) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$.

38. Сократите дробь:

1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$;

2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$;

3) $\frac{4x-16y}{16y}$;

4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$;

5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$;

6) $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$;

7) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$;

8) $\frac{7m^2+7m+7}{m^3-1}$;

9) $\frac{64-x^2}{3x^2-24x}$.

39. Приведите дробь:

1) $\frac{a}{a+2}$ к знаменателю $4a+8$;

2) $\frac{m}{m-3n}$ к знаменателю m^2-9n^2;

3) $\frac{x}{2x-y}$ к знаменателю $7y-14x$;

4) $\frac{5b}{2a+3b}$ к знаменателю $4a^2+12ab+9b^2$;

5) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ к знаменателю x^3-1.

40. Представьте выражение $x-5y$ в виде дроби со знаменателем:
1) 2; 2) x; 3) $4y^3$; 4) x^2-25y^2.

41. Приведите дробь $\frac{6}{b-4}$ к знаменателю:

1) $5b-20$; 2) $12-3b$; 3) b^2-4b; 4) b^2-16.

42. Представьте данные дроби в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

1) $\frac{1}{8ab}$ и $\frac{1}{2a^3}$;

2) $\frac{3x}{7m^3n^3}$ и $\frac{4y}{3m^2n^4}$;

3) $\frac{a+b}{a-b}$ и $\frac{2}{a^2-b^2}$;

4) $\frac{3d}{m-n}$ и $\frac{8p}{(m-n)^2}$;

5) $\frac{x}{2x+1}$ и $\frac{x}{3x-2}$;

6) $\frac{a-b}{3a+3b}$ и $\frac{a}{a^2-b^2}$;

7) $\frac{3a}{4a-4}$ и $\frac{2a}{5-5a}$;

8) $\frac{7a}{b-3}$ и $\frac{c}{9-b^2}$.

43. Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{4}{15x^2y^2}$ и $\frac{1}{10x^3y}$;

2) $\frac{c}{6a^4b^5}$ и $\frac{d}{9ab^2}$;

3) $\frac{x}{y-5}$ и $\frac{z}{y^2-25}$;

4) $\frac{m+n}{m^2-mn}$ и $\frac{2m-3n}{m^2-n^2}$;

5) $\frac{x+1}{x^2-xy}$ и $\frac{y-1}{xy-y^2}$;

6) $\frac{6a}{a-2b}$ и $\frac{3a}{a+b}$;

7) $\frac{1+c^2}{c^2-16}$ и $\frac{c}{4-c}$;

8) $\frac{2m+9}{m^2+5m+25}$ и $\frac{m}{m-5}$.

44. Сократите дробь:

1) $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$;

2) $\frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$;

3) $\frac{xy+x-5y-5}{4y+4}$;

4) $\frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$.

45. Сократите дробь:

1) $\frac{2m^2 - 72n^2}{(4m + 24n)^2}$; 2) $\frac{a^3 - 8}{ab - a - 2b + 2}$; 3) $\frac{a^3 + 2a^2b + ab^2}{a^3 - ab^2}$.

46. Найдите значение дроби, предварительно сократив её:

1) $\frac{15a^2 + 10ab}{3ab + 2b^2}$, если $a = -2$, $b = 0{,}4$;

2) $\frac{9b^2 - 4c^2}{12b^2c - 8bc^2}$, если $b = \frac{1}{3}$, $c = -6$;

3) $\frac{36x^2 - 12xy + y^2}{y^2 - 36x^2}$, если $x = 1{,}2$, $y = -3$;

4) $\frac{a^8 - a^6}{a^9 + a^8}$, если $a = -0{,}1$.

47. Найдите значение выражения:

1) $\frac{16x^2 - 4y^2}{6x - 3y}$ при $x = 2{,}5$, $y = -2$; 2) $\frac{49c^2 - 9}{49c^2 + 42c + 9}$ при $c = -4$.

48. Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{2p}{5p - 15}$ и $\frac{1}{p^3 - 27}$;

2) $\frac{3a + 1}{9a^2 - 6a + 1}$ и $\frac{a - 2}{9a^2 - 1}$;

3) $\frac{a}{a^2 - 7a}$ и $\frac{a + 3}{a^2 - 14a + 49}$;

4) $\frac{2x}{x^2 - 1}$, $\frac{3x}{x^2 - 2x + 1}$ и $\frac{4}{x^2 + 2x + 1}$;

5) $\frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc}$, $\frac{b}{2a - 2b}$ и $\frac{ab}{4a - 4c}$.

49. Запишите в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

1) $\frac{3a}{3a - 2}$, $\frac{a}{9a + 6}$ и $\frac{a^2}{9a^2b - 4b}$;

2) $\frac{1}{a - 5b}$, $\frac{1}{a^2 + 7ac}$ и $\frac{1}{a^2 + 7ac - 5ab - 35bc}$.

50. Найдите значение выражения $\frac{2xy - y^2}{3xy + x^2}$, если $\frac{x}{y} = 2$.

51. Найдите значение выражения $\frac{4a^2 - ab}{ab + 14b^2}$, если $\frac{a}{b} = 5$.

52. Известно, что $2a - 6b = 1$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{8}{a - 3b}$; 2) $\frac{a^2 - 9b^2}{0{,}5a + 1{,}5b}$.

53. Найдите значение выражения $\dfrac{2m - 1{,}5n}{32m^2 - 18n^2}$, если $4m + 3n = 8$.

54. Существует ли такое значение a, при котором дробь $\dfrac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^3 + a^2 + a + 1}$ принимает отрицательное значение?

55. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$;
3) $y = \dfrac{x^2 - 10x + 25}{x - 5} - \dfrac{2x^2 - 4x}{x}$;
2) $y = \dfrac{x - 3}{3 - x}$;
4) $y = \dfrac{2}{x + 4} - \dfrac{2}{x + 4}$.

56. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{x - 4}$;
2) $y = x - \dfrac{x}{x}$;
3) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x} - \dfrac{2x^2 - 2}{x^2 - 1}$.

57. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{|x|}{x}$;
2) $y = \dfrac{x^2 - 1}{|x| - 1}$.

58. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x + 1}{x + 1} = 1$;
2) $\dfrac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$;
3) $\dfrac{x + 6}{|x| - 6} = 0$.

59. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2 - 16}{x + 4} = -8$;
2) $\dfrac{|x| - 7}{x - 7} = 0$.

60. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $ax = 1$;
3) $(a - 6)x = a^2 - 12a + 36$;
2) $ax = a$;
4) $(a^2 - 4)x = a - 2$.

61. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $(a + 3)x = 3$;
2) $(a^2 - 9a)x = a^2 - 18a + 81$.

Упражнения для повторения

62. Упростите выражение:

1) $(x + 2)(x - 9) - 3x(3 - 2x)$;
2) $(a + 5)(a - 2) + (a + 4)(a - 5)$;
3) $(y - 8)(2y + 1) - (3y + 1)(y - 6)$;
4) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$;
5) $(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3)$;
6) $(y - 4)(y + 3) - (y - 6)^2$.

63. Постройте график функции:

1) $y = 2$;
2) $y = 2x$;
3) $y = 2x - 1$.

64. Какое наименьшее значение и при каких значениях a и b принимает выражение $(a - 2)(a + 2) + 4b(b - a)$?

65. Расстояние от села Вишнёвое до железнодорожной станции на 14 км меньше расстояния от села Яблоневое до той же станции. Время, за которое автобус преодолевает расстояние от села Вишнёвое до станции, составляет 45 мин, а время, за которое легковой автомобиль проезжает от села Яблоневое до станции, на 5 мин больше, причём скорость автомобиля на 12 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорость автобуса и скорость легкового автомобиля.

Готовимся к изучению новой темы

66. Выполните действия:

1) $\frac{7}{18} + \frac{5}{18}$; 2) $\frac{9}{16} + \frac{7}{16}$; 3) $\frac{23}{32} - \frac{15}{32}$; 4) $4 - 1\frac{3}{11}$.

Учимся делать нестандартные шаги

67. На сторонах квадрата записаны четыре натуральных числа. В каждой вершине квадрата записано число, равное произведению чисел, записанных на сторонах, для которых эта вершина является общей. Сумма чисел, записанных в вершинах, равна 55. Найдите сумму чисел, записанных на сторонах квадрата.

§ 3. Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Вы знаете правила сложения и вычитания обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями. Их можно выразить такими равенствами:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

По таким же правилам складывают и вычитают рациональные дроби с одинаковыми знаменателями.

Чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.
Чтобы вычесть рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тот же.

Пример 1. Выполните вычитание:

1) $\dfrac{7x-5}{8x^2}-\dfrac{3x-5}{8x^2}$; 2) $\dfrac{y^2+2y}{y^2-25}-\dfrac{12y-25}{y^2-25}$; 3) $\dfrac{4}{2a-1}-\dfrac{2a-3}{1-2a}$.

Решение. 1) $\dfrac{7x-5}{8x^2}-\dfrac{3x-5}{8x^2}=\dfrac{7x-5-(3x-5)}{8x^2}=\dfrac{7x-5-3x+5}{8x^2}=$

$=\dfrac{4x}{8x^2}=\dfrac{1}{2x}$.

2) $\dfrac{y^2+2y}{y^2-25}-\dfrac{12y-25}{y^2-25}=\dfrac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25}=\dfrac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25}=$

$=\dfrac{y^2-10y+25}{y^2-25}=\dfrac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)}=\dfrac{y-5}{y+5}$.

3) $\dfrac{4}{2a-1}-\dfrac{2a-3}{1-2a}=\dfrac{4}{2a-1}-\dfrac{2a-3}{-(2a-1)}=\dfrac{4}{2a-1}+\dfrac{2a-3}{2a-1}=$

$=\dfrac{4+2a-3}{2a-1}=\dfrac{2a+1}{2a-1}$. ◄

Пример 2. Известно, что $\dfrac{m}{n}=-3$. Найдите значение выражения $\dfrac{2m+n}{m}$.

Решение. Представим данную дробь в виде суммы целого и дробного выражений:

$$\frac{2m+n}{m}=\frac{2m}{m}+\frac{n}{m}=2+\frac{n}{m}.$$

Если $\dfrac{m}{n}=-3$, то $\dfrac{n}{m}=-\dfrac{1}{3}$. Следовательно, $\dfrac{2m+n}{m}=2+\dfrac{n}{m}=2-\dfrac{1}{3}=1\dfrac{2}{3}$. ◄

Пример 3. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения $\dfrac{2n^2+3n-15}{n}$ является целым числом.

Решение. Представим данную дробь в виде разности целого и дробного выражений:

$$\frac{2n^2+3n-15}{n}=\frac{2n^2}{n}+\frac{3n}{n}-\frac{15}{n}=2n+3-\frac{15}{n}.$$

Выражение $2n+3$ принимает натуральные значения при любом натуральном n. Поэтому выражение $2n+3-\dfrac{15}{n}$ принимает целые значения, если значения выражения $\dfrac{15}{n}$ являются целыми числами. Это возможно только при следующих натуральных значениях n: 1, 3, 5, 15.

Ответ: $n=1$, или $n=3$, или $n=5$, или $n=15$. ◄

1. Как сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями?
2. Как вычесть рациональные дроби с одинаковыми знаменателями?

Упражнения

68. Выполните действия:

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}$;
2) $\frac{a}{3}-\frac{b}{3}$;
3) $\frac{m}{n}+\frac{4m}{n}$;
4) $\frac{6c}{d}-\frac{2c}{d}$;
5) $\frac{m+n}{6}-\frac{m-2n}{6}$;
6) $\frac{2a-3b}{6ab}+\frac{9b-2a}{6ab}$;
7) $-\frac{5c+4d}{cd}+\frac{4d+9c}{cd}$;
8) $\frac{8m+3}{10m^2}-\frac{2m+3}{10m^2}$.

69. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{7k}{18p}-\frac{4k}{18p}$;
2) $\frac{a-b}{2b}-\frac{a}{2b}$;
3) $-\frac{a-12b}{27a}+\frac{a+15b}{27a}$;
4) $\frac{x-7y}{xy}-\frac{x-4y}{xy}$;
5) $\frac{10a+6b}{11a^3}-\frac{6b-a}{11a^3}$;
6) $\frac{x^2-xy}{x^2y}+\frac{2xy-3x^2}{x^2y}$.

70. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2}{a+3}-\frac{9}{a+3}$;
2) $\frac{t}{t^2-16}-\frac{4}{t^2-16}$;
3) $\frac{m^2}{(m-5)^2}-\frac{25}{(m-5)^2}$;
4) $\frac{5x+9}{x^2-1}-\frac{4x+8}{x^2-1}$;
5) $\frac{b^2}{b+10}+\frac{20b+100}{b+10}$;
6) $\frac{c^2}{c-7}-\frac{14c-49}{c-7}$.

71. Упростите выражение:

1) $\frac{c^2}{c-9}-\frac{81}{c-9}$;
2) $\frac{a^2}{(a-6)^2}-\frac{36}{(a-6)^2}$;
3) $\frac{3x+5}{x^2-4}-\frac{2x+7}{x^2-4}$;
4) $\frac{y^2}{y-2}-\frac{4y-4}{y-2}$.

72. Выполните действия:

1) $\frac{a+b}{c-7}+\frac{a}{7-c}$;
2) $\frac{5m}{m-n}+\frac{5n}{n-m}$;
3) $\frac{2x-4y}{x-3y}-\frac{4x-14y}{3y-x}$;
4) $\frac{81b^2}{9b-a}+\frac{a^2}{a-9b}$;
5) $\frac{t^2}{3t-6}+\frac{4}{6-3t}$;
6) $\frac{y^2}{y-1}-\frac{1-2y}{1-y}$.

73. Упростите выражение:

1) $\frac{x}{y-1}+\frac{2}{1-y}$; 3) $\frac{3m+2n}{2m-3n}-\frac{m-8n}{3n-2m}$;

2) $\frac{3c}{c-d}+\frac{3d}{d-c}$; 4) $\frac{b^2}{2b-14}+\frac{49}{14-2b}$.

74. Найдите значение выражения:

1) $\frac{a^2-48}{a-8}-\frac{16}{a-8}$ при $a=32$; 2) $\frac{c^2+3c+7}{c^3-8}+\frac{c+3}{8-c^3}$ при $c=-3$.

75. Найдите значение выражения:

1) $\frac{5x+3}{x^2-16}+\frac{6x-1}{16-x^2}$ при $x=-4{,}1$; 2) $\frac{a^2+a}{a^2-9}-\frac{7a-9}{a^2-9}$ при $a=7$.

76. Упростите выражение:

1) $\frac{5n-1}{20n}-\frac{7n-8}{20n}-\frac{8n+7}{20n}$; 3) $\frac{3k}{k^3-1}+\frac{4k+1}{1-k^3}+\frac{k^2}{1-k^3}$.

2) $\frac{9m+2}{m^2-4}-\frac{m-9}{4-m^2}+\frac{1-7m}{m^2-4}$;

77. Упростите выражение:

1) $\frac{6a-1}{16a-8}+\frac{4a-7}{16a-8}+\frac{-2a-2}{8-16a}$; 2) $\frac{2a^2+12a}{a^2-25}+\frac{8a-9}{25-a^2}-\frac{a^2+14a-16}{a^2-25}$.

78. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{15-8a}{(a-1)^2}-\frac{14-7a}{(1-a)^2}$; 3) $\frac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)}-\frac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}$.

2) $\frac{3b^2+12}{(b-2)^3}+\frac{12b}{(2-b)^3}$;

79. Упростите выражение:

1) $\frac{x^2-16x}{(x-7)^4}+\frac{2x+49}{(7-x)^4}$; 2) $\frac{y^2+y}{(y-6)(y+2)}+\frac{y+36}{(6-y)(2+y)}$.

80. Докажите тождество:

1) $\frac{(a+b)^2}{4ab}-\frac{(a-b)^2}{4ab}=1$; 2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}=2$.

81. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение выражения $\frac{12x-25}{20x-15}+\frac{8x+10}{20x-15}$ не зависит от значения x.

82. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной y значение выражения $\frac{17y+5}{21y-3}-\frac{9-11y}{21y-3}$ не зависит от значения y.

83. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{a^2-6}{(a-2)^4}-\frac{7a-4}{(a-2)^4}+\frac{3a+6}{(a-2)^4}$ принимает положительные значения.

84. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{2-b^2}{(b-5)^6} - \frac{7-3b}{(b-5)^6} + \frac{7b-20}{(b-5)^6}$ принимает отрицательные значения.

85. Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

1) $\frac{x+3}{x}$; 2) $\frac{a^2-2a-5}{a-2}$.

86. Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

1) $\frac{4a-b}{a}$; 2) $\frac{b^2+7b+3}{b+7}$.

87. Известно, что $\frac{x}{y} = 4$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{y}{x}$; 2) $\frac{2x-3y}{y}$; 3) $\frac{x^2+y^2}{xy}$.

88. Известно, что $\frac{a}{b} = -2$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{a-b}{a}$; 2) $\frac{4a+5b}{b}$; 3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

89. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения является целым числом:

1) $\frac{n+6}{n}$; 2) $\frac{3n^2-4n-14}{n}$; 3) $\frac{4n+7}{2n-3}$.

90. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения является целым числом:

1) $\frac{8n-9}{n}$; 2) $\frac{n^2+2n-8}{n}$; 3) $\frac{9n-4}{3n-5}$.

Упражнения для повторения

91. Из двух сёл, расстояние между которыми 9 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились через 20 мин. Если бы велосипедисты ехали в одном направлении, то один из них догнал бы другого через 3 ч. Найдите скорость каждого велосипедиста.

92. Решите уравнение:

1) $1 - 4(x+1) = 1{,}8 - 1{,}6x$; 2) $3(0{,}5x - 4) + 8{,}5x = 10x - 11$.

93. Докажите, что выражение $(a+4)(a-8) + 4(2a+9)$ при всех значениях a принимает неотрицательные значения.

Готовимся к изучению новой темы

94. Вместо звёздочки запишите такой одночлен, чтобы выполнялось равенство:

1) $a^2b \cdot * = a^2b^2$; 2) $5xy^3 \cdot * = 10x^4y^6$; 3) $6x^5 \cdot * = 12x^{10}$.

95. Вместо звёздочки запишите такой многочлен, чтобы выполнялось равенство:

1) $* \cdot (a - b) = (a + b)(a - b)^2$; 2) $(a + 10b) \cdot * = a^3 - 100ab^2$.

96. Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{1}{3a}$ и $\frac{2}{3b}$; 3) $\frac{5}{m-n}$ и $\frac{6}{m+n}$; 5) $\frac{y}{6y-36}$ и $\frac{1}{y^2-6y}$;

2) $\frac{4m}{p^3q^2}$ и $\frac{3n}{p^2q^3}$; 4) $\frac{6x}{x-2y}$ и $\frac{y}{x+y}$; 6) $\frac{1}{a^2-1}$ и $\frac{1}{a^2+a}$.

Учимся делать нестандартные шаги

97. Может ли чётное число иметь нечётных делителей больше, чем чётных?

§ 4. Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями

Применяя основное свойство рациональной дроби, можно сложение и вычитание дробей с разными знаменателями свести к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями.

Пусть нужно сложить две рациональные дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$.

Можно записать: $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}$; $\frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}$.

Тогда $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}$.

Здесь в качестве **общего знаменателя** выбрано выражение, равное произведению знаменателей данных дробей.

Отметим, что произведение знаменателей данных дробей не всегда является наиболее удобным общим знаменателем.

Напомним, что при нахождении общего знаменателя обыкновенных дробей мы находили наименьшее общее кратное знаменателей, раскладывая их на простые множители. Аналогично для нахождения общего знаменателя рациональных дробей может оказаться удобным предварительно разложить знаменатели на множители.

Пример 1. Упростите выражение:

1) $\frac{b+1}{abc}+\frac{1-a}{a^2c}$; 4) $\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}$;

2) $\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}$; 5) $\frac{x}{x-4}-\frac{x+2}{x-2}$.

3) $\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$;

Решение. 1) Общим знаменателем данных дробей является одночлен a^2bc. Следовательно,

$$\frac{b+1}{abc}^{\backslash a}+\frac{1-a}{a^2c}^{\backslash b}=\frac{ab+a+b-ab}{a^2bc}=\frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Разложив предварительно знаменатели данных дробей на множители, получаем:

$$\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}=\frac{m}{7(m+n)}^{\backslash m-n}-\frac{n}{7(m-n)}^{\backslash m+n}=$$

$$=\frac{m(m-n)-n(m+n)}{7(m+n)(m-n)}=\frac{m^2-mn-mn-n^2}{7(m^2-n^2)}=\frac{m^2-2mn-n^2}{7(m^2-n^2)}.$$

3) Имеем: $\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}=\frac{10n+14}{(n-7)(n+7)}-\frac{6}{n-7}^{\backslash n+7}=$

$$=\frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)}=\frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)}=\frac{4n-28}{(n-7)(n+7)}=\frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)}=\frac{4}{n+7}.$$

4) $\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}=\frac{2a}{(5-a)^2}-\frac{1}{3(a-5)}=\frac{2a}{(a-5)^2}^{\backslash 3}-\frac{1}{3(a-5)}^{\backslash a-5}=$

$$=\frac{6a-a+5}{3(a-5)^2}=\frac{5a+5}{3(a-5)^2}.$$

5) В качестве общего знаменателя данных дробей удобно взять произведение их знаменателей. Получаем:

$$\frac{x}{x-4}^{\backslash x-2}-\frac{x+2}{x-2}^{\backslash x-4}=\frac{x(x-2)-(x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)}=$$

$$=\frac{x^2-2x-x^2+4x-2x+8}{(x-4)(x-2)}=\frac{8}{(x-4)(x-2)}.$$

Пример 2. Представьте в виде дроби выражение $\frac{21c^2}{7c-2}-3c$.

Решение. Представив выражение $3c$ в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$\frac{21c^2}{7c-2}-3c=\frac{21c^2}{7c-2}-\frac{3c^{\backslash 7c-2}}{1}=\frac{21c^2-21c^2+6c}{7c-2}=\frac{6c}{7c-2}.$$

Заметим, что сумма и разность двух рациональных дробей являются рациональными дробями.

1. Как выполнить сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями?

2. Что является суммой и разностью двух рациональных дробей?

Упражнения

98. Выполните действия:

1) $\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}$; 4) $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}$; 7) $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{ab^4}$;

2) $\frac{5b}{14}-\frac{b}{7}$; 5) $\frac{m}{4n}+\frac{m}{6n}$; 8) $\frac{11}{5a}-\frac{2c}{15ab}$;

3) $\frac{m}{8}-\frac{n}{6}$; 6) $\frac{c}{b}-\frac{d}{3b}$; 9) $\frac{m}{abc}+\frac{c}{abm}$.

99. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{x}{8}-\frac{y}{12}$; 3) $\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$; 5) $\frac{7}{cd}+\frac{k}{cp}$;

2) $\frac{4a}{7}+\frac{a}{4}$; 4) $\frac{x^2}{2y}+\frac{y}{8x}$; 6) $\frac{6a}{35c^5}-\frac{9b}{14c^2}$.

100. Упростите выражение:

1) $\frac{a+7}{12}+\frac{a-4}{9}$; 5) $\frac{5m-n}{14m}-\frac{m-6n}{7m}$; 9) $\frac{k+4}{k}-\frac{3k-4}{k^2}$;

2) $\frac{2b-7c}{6}-\frac{3b+2c}{15}$; 6) $\frac{x+4}{11x}-\frac{y-3}{11y}$; 10) $\frac{x-y}{x^3}-\frac{y-x^2}{x^2y}$;

3) $\frac{3x-2}{x}-\frac{3y-1}{y}$; 7) $\frac{a+b}{ab}+\frac{a-c}{ac}$; 11) $\frac{2m-3n}{m^2n}+\frac{7m-2n}{mn^2}$;

4) $\frac{6p+1}{p}-\frac{2p+8}{3p}$; 8) $\frac{2}{p^2}+\frac{p-1}{p}$; 12) $\frac{c+d}{cd^4}-\frac{c^2-8d}{c^3d^3}$.

101. Выполните сложение или вычитание дробей:

1) $\frac{9-5b}{b}-\frac{7-5c}{c}$; 4) $\frac{m-n}{mn}-\frac{p-n}{np}$; 7) $\frac{1}{x^3}-\frac{1+x^2}{x^5}$;

2) $\frac{4d+7}{7d}-\frac{d-6}{6d}$; 5) $\frac{6a+2}{ab}-\frac{2a+4}{a^2b}$; 8) $\frac{1-ab}{abc}-\frac{1-ad}{acd}$.

3) $\frac{5-k}{5p}-\frac{p+10}{5k}$; 6) $\frac{c^2-16}{c^6}-\frac{c-9}{c^5}$;

102. Выполните действия:

1) $\frac{2}{x}+\frac{3x-2}{x+1}$;
3) $\frac{a}{a-3}-\frac{3}{a+3}$;
5) $\frac{x}{2y+1}-\frac{x}{3y-2}$;

2) $\frac{m}{n}-\frac{m}{m+n}$;
4) $\frac{c}{3c-1}-\frac{c}{3c+1}$;
6) $\frac{a-b}{b}-\frac{a-b}{a+b}$.

103. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}$;
2) $\frac{4}{x}-\frac{5x+4}{x+2}$;
3) $\frac{b}{b-2}-\frac{2}{b+2}$.

104. Упростите выражение:

1) $\frac{1}{b(a-b)}-\frac{1}{a(a-b)}$;
4) $\frac{y}{2(y+3)}-\frac{y}{5(y+3)}$;

2) $\frac{5}{a}+\frac{30}{a(a-6)}$;
5) $\frac{5m+3}{2(m+1)}-\frac{7m+4}{3(m+1)}$;

3) $\frac{3}{x-2}-\frac{2x+2}{x(x-2)}$;
6) $\frac{c-a}{a(a+b)}+\frac{c+b}{b(a+b)}$.

105. Выполните действия:

1) $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}$;
3) $\frac{x}{5(x+7)}-\frac{x}{6(x+7)}$;

2) $\frac{4}{b}-\frac{8}{b(b+2)}$;
4) $\frac{4n+2}{3(n-1)}-\frac{5n+3}{4(n-1)}$.

106. Выполните сложение или вычитание дробей:

1) $\frac{a}{a-2}-\frac{3a+1}{3a-6}$;
5) $\frac{m+1}{3m-15}-\frac{m-1}{2m-10}$;

2) $\frac{18}{b^2+3b}-\frac{6}{b}$;
6) $\frac{m-2n}{6m+6n}-\frac{m-3n}{4m+4n}$;

3) $\frac{2}{c+1}-\frac{c-1}{c^2+c}$;
7) $\frac{a^2+2}{a^2+2a}-\frac{a+4}{2a+4}$;

4) $\frac{d-1}{2d-8}+\frac{d}{d-4}$;
8) $\frac{3x-4y}{x^2-2xy}-\frac{3y-x}{xy-2y^2}$.

107. Упростите выражение:

1) $\frac{b}{b-5}-\frac{4b-1}{4b-20}$;
4) $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\frac{b}{a+b}$;

2) $\frac{2}{m}-\frac{16}{m^2+8m}$;
5) $\frac{b+4}{ab-b^2}-\frac{a+4}{a^2-ab}$;

3) $\frac{a-2}{2a-6}-\frac{a-1}{3a-9}$;
6) $\frac{c-4}{4c+24}+\frac{4c+9}{c^2+6c}$.

108. Выполните действия:

1) $\frac{3}{x+3}+\frac{x+4}{x^2-9}$;

2) $\frac{a^2}{a^2-64}-\frac{a}{a-8}$;

3) $\frac{6b}{9b^2-4}-\frac{1}{3b-2}$;

4) $\frac{3a+b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$;

5) $\frac{m}{m+5}-\frac{m^2}{m^2+10m+25}$;

6) $\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}$.

109. Упростите выражение:

1) $\frac{4x-y}{x^2-y^2}+\frac{1}{x-y}$;

2) $\frac{y^2}{y^2-81}-\frac{y}{y+9}$;

3) $\frac{10a}{25a^2-9}-\frac{1}{5a+3}$;

4) $\frac{n}{n-7}-\frac{n^2}{n^2-14n+49}$.

110. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{a}{b}+1$;

2) $\frac{x}{y}-x$;

3) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2$;

4) $\frac{9}{p^2}-\frac{4}{p}+3$;

5) $2-\frac{3b+2a}{a}$;

6) $\frac{3b+4}{b-2}-3$;

7) $6m-\frac{12m^2+1}{2m}$;

8) $\frac{20b^2+5}{2b-1}-10b$.

111. Выполните действия:

1) $a-\frac{4}{a}$;

2) $\frac{1}{x}+x-2$;

3) $\frac{m}{n^3}-\frac{1}{n}+m$;

4) $\frac{2k^2}{k-5}-k$;

5) $3n-\frac{9n^2-2}{3n}$;

6) $5-\frac{4y-12}{y-2}$.

112. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2+1}{a^2-2a+1}+\frac{a+1}{a-1}$;

2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{c+7}{c-7}+\frac{28c}{49-c^2}$;

4) $\frac{5a+3}{2a^2+6a}+\frac{6-3a}{a^2-9}$;

5) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a+4}{a^2-4}$;

6) $\frac{2p}{p-5}-\frac{5}{p+5}+\frac{2p^2}{25-p^2}$;

7) $\frac{1}{y}-\frac{y+8}{16-y^2}-\frac{2}{y-4}$;

8) $\frac{2b-1}{4b+2}+\frac{4b}{4b^2-1}+\frac{2b+1}{3-6b}$.

113. Упростите выражение:

1) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

2) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y^2}{2xy+x^2+y^2}$;

3) $\frac{2a}{4a^2-1}-\frac{a+4}{2a^2+a}$;

4) $\frac{b-2}{b^2+6b+9}-\frac{b}{b^2-9}$;

5) $\frac{x-6}{x^2+3x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}$;

6) $\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}$.

114. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения не зависит от значения переменной:

1) $\frac{2x+1}{2x-4}+\frac{2x-1}{6-3x}-\frac{x+7}{6x-12}$;

2) $\frac{24-2a}{a^2-16}-\frac{a}{2a-8}+\frac{4}{a+4}$.

115. Представьте в виде дроби выражение:

1) $1-a+\frac{a^2-2}{a+2}$;

2) $\frac{a^2-b^2}{3a+b}+3a-b$;

3) $\frac{c^2+9}{c-3}-c-3$;

4) $\frac{8m^2}{4m-3}-2m-1$.

116. Упростите выражение:

1) $b+7-\frac{14b}{b+7}$;

2) $5c-\frac{10-29c+10c^2}{2c-5}+2$.

117. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $\frac{7}{2a-4}-\frac{12}{a^2-4}-\frac{3}{a+2}$, если $a=5$;

2) $\frac{2c+3}{2c^2-3c}+\frac{2c-3}{2c^2+3c}-\frac{16c}{4c^2-9}$, если $c=-0{,}8$;

3) $\frac{m^2+16n^2}{m^2-16n^2}-\frac{m+4n}{2m-8n}$, если $m=3$, $n=0{,}5$.

118. Найдите значение выражения:

1) $\frac{6}{5x-20}-\frac{x-5}{x^2-8x+16}$, если $x=5$;

2) $\frac{2y-1}{2y}-\frac{2y}{2y-1}-\frac{1}{2y-4y^2}$, если $y=-2\frac{3}{7}$.

119. Докажите тождество:

1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2-ab}=0$;

2) $\frac{a+3}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{6}{a^2-1}=\frac{2}{a^2-1}$;

3) $\frac{2a^2+4}{a^2-1}-\frac{a-2}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}=\frac{1}{a-1}$.

120. Докажите тождество:

1) $\frac{1}{6a-4b}-\frac{1}{6a+4b}-\frac{3a}{4b^2-9a^2}=\frac{1}{3a-2b}$;

2) $\frac{c+2}{c^2+3c}-\frac{1}{3c+9}-\frac{2}{3c}=0$.

121. Найдите разность дробей:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$; 2) $\frac{1}{b+3}-\frac{b^2-6b}{b^3+27}$.

122. Упростите выражение:

1) $\frac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n}-\frac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n}$; 2) $1-\frac{2b-1}{4b^2-2b+1}-\frac{2b}{2b+1}$.

123. Докажите тождество:

$$\frac{3a^2+24}{a^3+8}-\frac{6}{a^2-2a+4}-\frac{1}{a+2}=\frac{2}{a+2}.$$

124. Упростите выражение:

1) $\frac{4b}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{b^2-ab}$;

2) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}+\frac{x^2+4}{8x-2x^3}$;

3) $\frac{1}{(a-5b)^2}-\frac{2}{a^2-25b^2}+\frac{1}{(a+5b)^2}$;

4) $\frac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6}-\frac{x+5}{y-2}$.

125. Докажите тождество:

1) $\frac{a+3}{a^2-3a}+\frac{a-3}{3a+9}+\frac{12}{9-a^2}=\frac{a-3}{3a}$;

2) $\frac{b-4}{2a-1}-\frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a}=\frac{2}{2a-1}$.

126. Докажите тождество:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0.$$

127. Докажите тождество:

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$

128. Упростите выражение:

$$\frac{1}{(a-1)(a-2)}+\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-4)}.$$

129. Упростите выражение:

$$\frac{1}{(a-1)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-5)}+\frac{1}{(a-5)(a-7)}.$$

130. Докажите тождество:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{32}{1-a^{32}}.$$

131. Докажите тождество:

$$\frac{3}{1-a^2}+\frac{3}{1+a^2}+\frac{6}{1+a^4}+\frac{12}{1+a^8}+\frac{24}{1+a^{16}}=\frac{48}{1-a^{32}}.$$

132. Докажите, что если $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{a+c}+\frac{c-b}{a+b}=1$, то $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}=4$.

Упражнения для повторения

133. Найдите корень уравнения:

1) $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{2}=4$; 2) $\frac{x-4}{2}-\frac{x-1}{5}=3$.

134. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=8, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5y=13, \\ 3x-5y=-13. \end{cases}$

135. За первый день трёхдневной гонки велосипедисты проехали $\frac{4}{15}$ всего маршрута, за второй день — $\frac{2}{5}$ всего маршрута, а за третий — оставшиеся 90 км. Какое расстояние проехали велосипедисты за три дня?

136. (*Из болгарского фольклора.*) Пятеро братьев хотели разделить 20 овец так, чтобы каждый из них получил нечётное количество овец. Возможно ли это?

137. Верно ли утверждение, что при любом натуральном n значение выражения $(5n+7)^2-(n-1)^2$ делится нацело на 48?

Готовимся к изучению новой темы

138. Укажите число, обратное числу:

1) $\frac{5}{8}$; 2) 7; 3) $-3\frac{5}{6}$; 4) $\frac{1}{14}$; 5) 0,12.

139. Найдите произведение:

1) $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{20}$; 2) $6\cdot\frac{7}{18}$; 3) $\frac{3}{8}\cdot\left(-2\frac{2}{3}\right)$.

140. Выполните деление:

1) $\frac{5}{18} : \left(-\frac{25}{27}\right)$; 2) $8 : \frac{4}{17}$; 3) $-\frac{8}{15} : (-24)$; 4) $1\frac{3}{5} : 5\frac{1}{3}$.

141. Найдите значение степени:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; 3) $\left(-2\frac{2}{3}\right)^2$; 4) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

Учимся делать нестандартные шаги

142. Два парома одновременно отплывают от противоположных берегов реки и пересекают её перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянные, но разные. Паромы встречаются на расстоянии 720 м от одного из берегов, после чего продолжают движение. Достигнув берегов, паромы сразу начинают двигаться обратно и через некоторое время встречаются на расстоянии 400 м от другого берега. Какова ширина реки?

Задание № 1 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Какое из данных выражений является целым?

А) $\dfrac{m+n}{m}$ Б) $\dfrac{m+n}{7}$ В) $\dfrac{m+n}{7m}$ Г) $m+\dfrac{n}{7m}$

2. При каком значении переменной не имеет смысла выражение $\dfrac{3a}{2a-10}$?

А) 0 Б) 10 В) 5 Г) 0; 5

3. При каких значениях аргумента функция $y=\dfrac{x+2}{x^2-1}$ не определена?

А) –1; 1 Б) 1 В) –2; –1; 1 Г) –2; 1

4. Сократите дробь $\dfrac{21a^6}{14a^3}$.

А) $\dfrac{3a^3}{2}$ Б) $\dfrac{3a^2}{2}$ В) $\dfrac{3}{2a^3}$ Г) $\dfrac{3}{2a^2}$

5. Какой из данных дробей тождественно равна дробь $\dfrac{5b-15}{b^2-9}$?

А) $\dfrac{b-3}{5}$ Б) $\dfrac{b+3}{5}$ В) $\dfrac{5}{b-3}$ Г) $\dfrac{5}{b+3}$

6. Сократите дробь $\dfrac{12c^2-4c}{3c-1}$.

А) $4c$ Б) $-4c$ В) $\dfrac{1}{4c}$ Г) $-\dfrac{1}{4c}$

7. Выполните вычитание: $\dfrac{5x}{x-2}-\dfrac{10}{x-2}$.

А) $\dfrac{x+2}{x-2}$ Б) $\dfrac{5x+10}{x-2}$ В) 5 Г) –5

8. Выполните сложение: $\dfrac{4-m}{m-3}+\dfrac{2m-5}{3-m}$.

А) $\dfrac{m-1}{m-3}$ Б) $\dfrac{1-3m}{m-3}$ В) 3 Г) –3

9. Представьте в виде дроби выражение $\dfrac{3n^2}{n-6}-3n$.

А) $\dfrac{3n}{n-4}$ Б) $\dfrac{3n}{4-n}$ В) $\dfrac{18n}{n-6}$ Г) $\dfrac{18}{6-n}$

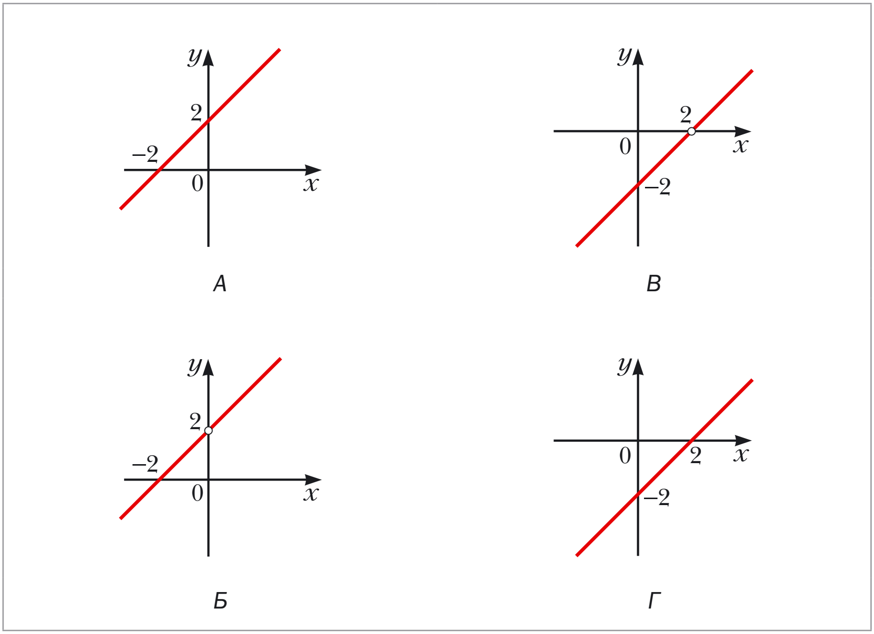
10. Упростите выражение $\dfrac{2m+1}{3m-2} - \dfrac{3m^2+m-2}{9m^2-12m+4}$.

А) $\dfrac{1}{(3m-2)^2}$ Б) $\dfrac{1}{3m-2}$ В) $\dfrac{m}{(3m-2)^2}$ Г) $\dfrac{m}{3m-2}$

11. Упростите выражение $\dfrac{a-12}{a^2+4a} - \dfrac{a-4}{a} + \dfrac{a}{a+4}$.

А) $\dfrac{4}{a}$ Б) $\dfrac{1}{a}$ В) a Г) $a+4$

12. На каком рисунке изображён график функции $y = \dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$?



А В Б Г

§ 5. Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень

Вы знаете правила умножения и деления обыкновенных дробей. Их можно выразить следующими равенствами:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

По аналогичным правилам выполняют умножение и деление рациональных дробей.

Произведением двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.

Частным двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителя делимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.

Пример 1. Выполните действия:

1) $\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4}$;

2) $(2x - 12) \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36}$;

3) $\frac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \frac{a^2 - 4b^2}{3a + 27}$;

4) $\frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7)$.

Решение. 1) Имеем:

$$\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4} = \frac{21c^6 \cdot b^2}{b^8 \cdot 14c^4} = \frac{3c^2}{2b^6}.$$

2) Представив многочлен $2x - 12$ в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$(2x - 12) \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{2x - 12}{1} \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{2(x-6) \cdot 4x}{(x-6)^2} = \frac{8x}{x - 6}.$$

3) $$\frac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \frac{a^2 - 4b^2}{3a + 27} = \frac{a(a + 2b)}{a + 9} \cdot \frac{3(a + 9)}{(a - 2b)(a + 2b)} = \frac{3a}{a - 2b}.$$

4) $$\frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7) = \frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : \frac{c - 7}{1} = \frac{5c(c - 7)}{c + 2} \cdot \frac{1}{c - 7} = \frac{5c}{c + 2}. \blacktriangleleft$$

Правило умножения двух дробей можно обобщить для нахождения произведения трёх и более рациональных дробей. Например, для трёх дробей имеем:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q}.$$

<u>Пример 2.</u> Упростите выражение $\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3} = \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{9bc^3}{4a^2} = \frac{2a^5 \cdot 10b^2 \cdot 9bc^3}{15b^3 \cdot 7c^4 \cdot 4a^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot a^5b^3c^3}{15 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a^2b^3c^4} = \frac{3a^3}{7c}. ◄$$

Применяя правило умножения рациональных дробей, можно получить правило возведения рациональных дробей в степень. Для натурального n, $n > 1$, имеем:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \ldots \cdot \frac{A}{B}}_{n \text{ множителей}} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{n \text{ множителей}}}{\underbrace{B \cdot B \cdot \ldots \cdot B}_{n \text{ множителей}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Для $n = 1$ договорились, что $\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}$.

Следовательно,

$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$, где n — натуральное число.

Чтобы возвести рациональную дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби.

<u>Пример 3.</u> Представьте в виде дроби выражение $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$.

Решение. $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\left(\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}$. ◄

1. Что является произведением двух рациональных дробей?
2. Что является частным двух рациональных дробей?
3. Как возвести рациональную дробь в степень?

<u>Упражнения</u>

143. Какому из данных выражений равно произведение $\frac{a^3}{c^8} \cdot \frac{c^4}{a^3}$?

1) $\frac{1}{c^2}$; 2) $\frac{a}{c^2}$; 3) $\frac{1}{c^4}$; 4) $\frac{a}{c^4}$.

144. Выполните умножение:

1) $\frac{3a^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}$;
4) $\frac{3m}{16n^2} \cdot 8n^6$;
7) $\frac{48ab}{17c^4} \cdot \frac{51bc^5}{40a^4}$;
2) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$;
5) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$;
8) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$.
3) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$;
6) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$;

145. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2}{b^6} \cdot \frac{b^2}{a^2}$;
3) $\frac{a}{2b} \cdot 2a$;
5) $\frac{11x^3}{y^8} \cdot \frac{y^5}{33x^7}$;
2) $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$;
4) $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$;
6) $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}$.

146. Упростите выражение:

1) $\frac{a-b}{3b} \cdot \frac{3}{a-b}$;
6) $\frac{m-2}{m^2-49} \cdot \frac{m+7}{m-2}$;
2) $\frac{2mn+n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$;
7) $(a+4) \cdot \frac{a}{2a+8}$;
3) $\frac{7a+7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a+b}$;
8) $\frac{x-9}{4x+8} \cdot \frac{x^2+2x}{x-9}$;
4) $\frac{32a}{a^2-9} \cdot \frac{a-3}{8a}$;
9) $\frac{4a^2-4a+1}{3a+3} \cdot \frac{a+1}{2a-1}$;
5) $\frac{c-1}{c+6} \cdot \frac{c+6}{c^2-2c+1}$;
10) $\frac{a^2-25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2-5a}$.

147. Выполните умножение:

1) $\frac{3a+b}{4c} \cdot \frac{c}{3a+b}$;
3) $\frac{5x-5y}{x^6} \cdot \frac{x^3}{x-y}$;
5) $\frac{6}{m^2-9n^2} \cdot (m-3n)$;
2) $\frac{ab-b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4}$;
4) $\frac{18b}{b^2-16} \cdot \frac{b+4}{3b}$;
6) $\frac{3c-9}{9c^2+6c+1} \cdot \frac{3c+1}{c-3}$.

148. Какому из данных выражений равно частное $\frac{3}{c^3} : \frac{12}{c^9}$?

1) $\frac{c^3}{4}$;
2) $\frac{c^6}{4}$;
3) $4c^3$;
4) $4c^6$.

149. Выполните деление:

1) $\frac{8m}{n} : \frac{4m}{n}$;
4) $\frac{6a}{5b} : \frac{3a^2}{20b^2}$;
7) $24a^3 : \frac{12a^2}{b}$;
2) $\frac{3b}{8} : b$;
5) $-\frac{9a}{b^5} : \frac{18a^4}{b^3}$;
8) $\frac{36a}{c^3} : (4a^2c)$.
3) $\frac{7c^2}{d} : \frac{c}{d^3}$;
6) $a^2 : \frac{a}{b^2c}$;

150. Найдите частное:

1) $\frac{7}{a^2} : \frac{28}{a^8}$; 3) $\frac{27}{m^6} : \frac{36}{m^7n^2}$; 5) $49m^4 : \frac{21m}{n^2}$;

2) $\frac{b^9}{8} : \frac{b^3}{48}$; 4) $\frac{6x^{10}}{y^8} : (30x^5y^2)$; 6) $\frac{16x^3y^8}{33z^5} : \left(-\frac{10x^2}{55z^6}\right)$.

151. Упростите выражение:

1) $\frac{a-b}{7a} : \frac{a-b}{7b}$; 5) $\frac{a^2-25}{a+7} : \frac{a-5}{a+7}$;

2) $\frac{x^2-y^2}{x^2} : \frac{6x+6y}{x^5}$; 6) $\frac{a^2-4a+4}{a+2} : (a-2)$;

3) $\frac{c-5}{c^2-4c} : \frac{c-5}{5c-20}$; 7) $(p^2-16k^2) : \frac{p+4k}{p}$;

4) $\frac{x-y}{xy} : \frac{x^2-y^2}{3xy}$; 8) $\frac{a^2-ab}{a^2} : \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

152. Выполните деление:

1) $\frac{5m-2n}{10k} : \frac{5m-2n}{10k^2}$; 4) $\frac{a^2-16}{a-3} : \frac{a+4}{a-3}$;

2) $\frac{p+3}{p^2-2p} : \frac{p+3}{4p-8}$; 5) $\frac{y-9}{y-8} : \frac{y^2-81}{y^2-16y+64}$;

3) $\frac{a^2-b^2}{2ab} : \frac{a+b}{ab}$; 6) $(x^2-49y^2) : \frac{x-7y}{x}$.

153. Выполните возведение в степень:

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^9$; 3) $\left(\frac{c}{2d}\right)^5$; 5) $\left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3$;

2) $\left(\frac{m}{n^2}\right)^8$; 4) $\left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2$; 6) $\left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2$.

154. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10}$; 2) $\left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3$; 4) $\left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6$.

155. Упростите выражение:

1) $\frac{6a^4b^2}{35c^3} \cdot \frac{14b^2}{a^7c^5} \cdot \frac{5a^3c^8}{18b^4}$; 4) $\left(\frac{m^5n}{3p^3}\right)^3 : \frac{m^{10}n^5}{54p^8}$;

2) $\frac{33m^8}{34n^8} : \frac{88m^4}{51n^4} : \frac{21m^6}{16n^2}$; 5) $\left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4 : \left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3$;

3) $\frac{36x^6}{49y^5} : \frac{24x^9}{25y^4} \cdot \frac{7x^2}{30y}$; 6) $\left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3$.

156. Упростите выражение:

1) $\frac{3a^4b^3}{10c^5}\cdot\frac{4b^4c^2}{27a^7}:\frac{5b^7}{9a^3c^3}$;

2) $\frac{3a^2}{2b^2c^2}:\frac{7c^8}{6b^3}:\frac{9ab}{14c^{12}}$;

3) $\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4\cdot\frac{b^{18}}{50a^{16}}$;

4) $\left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4:\left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3$.

157. Замените переменную x таким выражением, чтобы получилось тождество:

1) $\left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2\cdot x=\frac{6a}{b^2}$;

2) $\left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3:x=\frac{b^6}{12}$.

158. Выполните умножение и деление дробей:

1) $\frac{4-a}{8a^3}\cdot\frac{12a^5}{a^2-16}$;

2) $\frac{4c-d}{c^2+cd}\cdot\frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}$;

3) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9}\cdot\frac{b^3+27}{5b-15}$;

4) $\frac{a^3-16a}{3a^2b}\cdot\frac{12ab^2}{4a+16}$;

5) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}\cdot\frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2}$;

6) $\frac{x^2-9}{x+y}\cdot\frac{5x+5y}{x^2-3x}$;

7) $\frac{m+2n}{2-3m}:\frac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m}$;

8) $\frac{a^3+8}{16-a^4}:\frac{a^2-2a+4}{a^2+4}$;

9) $\frac{x^2-12x+36}{3x+21}\cdot\frac{x^2-49}{4x-24}$;

10) $\frac{3a+15b}{a^2-81b^2}:\frac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}$.

159. Упростите выражение:

1) $\frac{7a^2}{a^2-25}\cdot\frac{5-a}{a}$;

2) $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\cdot\frac{b-a}{b+a}$;

3) $\frac{a^4-1}{a^3-a}\cdot\frac{a}{1+a^2}$;

4) $\frac{a^2-8ab}{12b}:\frac{8b^2-ab}{24a}$;

5) $\frac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2}:\frac{15n-15m}{4m^2+4n^2}$;

6) $\frac{mn^2-36m}{m^3-8}:\frac{2n+12}{6m-12}$;

7) $\frac{a^4-1}{a^2-a+1}:\frac{a-1}{a^3+1}$;

8) $\frac{4x^2-100}{6x}:(2x^2-20x+50)$.

160. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $\frac{a^2-81}{a^2-8a}:\frac{a-9}{a^2-64}$, если $a=-4$;

2) $\frac{x}{4x^2-4y^2}:\frac{1}{6x+6y}$, если $x=4{,}2$, $y=-2{,}8$;

3) $(3a^2-18a+27):\frac{3a-9}{4a}$, если $a=0{,}5$;

4) $\frac{a^6+a^5}{(3a-3)^2}:\frac{a^5+a^4}{9a^2-9a}$, если $a=0{,}8$.

161. Найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{a^2 - ab} : \frac{b}{b^2 - a^2}$, если $a = 2\frac{1}{3}$, $b = -\frac{3}{7}$;

2) $\frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{a^2 - 9b^2} : \frac{3a + 6b}{2a - 6b}$, если $a = 4$, $b = -5$.

162. Известно, что $x - \frac{1}{x} = 9$. Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

163. Известно, что $3x + \frac{1}{x} = -4$. Найдите значение выражения $9x^2 + \frac{1}{x^2}$.

164. Дано: $x^2 + \frac{16}{x^2} = 41$. Найдите значение выражения $x + \frac{4}{x}$.

165. Дано: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$. Найдите значение выражения $x - \frac{1}{x}$.

166. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2 - 36}{a^2 + ab - 6a - 6b} : \frac{a^2 + ab + 6a + 6b}{a^2 + 2ab + b^2}$;

2) $\frac{a^2 + a - ab - b}{a^2 + a + ab + b} : \frac{a^2 - a - ab + b}{a^2 - a + ab - b}$.

167. Упростите выражение:

1) $\frac{25 - 5a + 5b - ab}{25 + 5a - 5b - ab} \cdot \frac{ab - 5a - 5b + 25}{ab + 5a + 5b + 25}$;

2) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - ab - 4a + 4b} : \frac{a^2 - ab + 4a - 4b}{a^2 - 16}$.

168. Докажите тождество:

$$\frac{8a^2}{a - 3b} : \frac{6a^3}{a^2 - 9b^2} \cdot \frac{3a}{4a + 12b} = 1.$$

169. Докажите тождество:

$$\frac{a^2 + a}{2a - 12} \cdot \frac{6a + 6}{2a + 12} : \frac{9a^3 + 18a^2 + 9a}{a^2 - 36} = \frac{1}{6}.$$

Упражнения для повторения

170. Решите уравнение:
1) $(2x + 3)^2 - 2x(5 + 2x) = 10$;
2) $(x - 2)(x - 3) - (x - 6)(x + 1) = 12$.

171. Докажите, что уравнение $\frac{2x + 1}{3} - \frac{x - 4}{2} = \frac{x + 5}{6}$ не имеет корней.

172. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 192 км, со скоростью 60 км/ч выехал мотоциклист. Через 30 мин навстречу ему из пункта B со скоростью 75 км/ч выехал второй мотоциклист. Сколько времени ехал второй мотоциклист до встречи с первым?

173. В двух бидонах находится 80 л молока. Если из одного бидона перелить 20 % молока в другой бидон, то в обоих бидонах молока станет поровну. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально?

174. (*Из учебника «Арифметика» Л. Ф. Магницкого*[1].) Двенадцать людей несут 12 хлебов. Каждый мужчина несёт по 2 хлеба, женщина — по половине хлеба, а ребёнок — по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?

«Арифметика»
Л. Ф. Магницкого

Учимся делать нестандартные шаги

175. Вася и Петя по очереди заменяют в уравнении $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0$ один знак $*$ на некоторое число. Первым замену делает Вася. Петя хочет получить уравнение, которое имеет корень. Может ли Вася ему помешать?

§ 6. Тождественные преобразования рациональных выражений

Правила действий над рациональными дробями позволяют любое рациональное выражение преобразовать в рациональную дробь.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Упростите выражение

$$\left(\frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2 - 4a + 4}\right) : \frac{a-4}{a^2 - 4} - \frac{2a^2 + 8a}{a-2}.$$

Решение. Аналогично нахождению значения числового выражения, содержащего несколько арифметических действий, данное выражение

[1] Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739) — выдающийся русский педагог-математик, автор знаменитого учебника «Арифметика» (1703), по которому училось несколько поколений. «Вратами своей учёности» считал «Арифметику» Магницкого М. В. Ломоносов.

можно упростить, выполняя действия в соответствии с порядком выполнения арифметических действий: сначала — вычитание выражений, стоящих в скобках, затем — деление и наконец — вычитание:

$$1)\ \frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}=\frac{3a}{a-2}^{\backslash a-2}-\frac{6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2};$$

$$2)\ \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}:\frac{a-4}{a^2-4}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}\cdot\frac{a^2-4}{a-4}=\frac{3a(a-4)}{(a-2)^2}\cdot\frac{(a-2)(a+2)}{a-4}=$$

$$=\frac{3a(a+2)}{a-2}=\frac{3a^2+6a}{a-2};$$

$$3)\ \frac{3a^2+6a}{a-2}-\frac{2a^2+8a}{a-2}=\frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2}=\frac{a^2-2a}{a-2}=\frac{a(a-2)}{a-2}=a.$$

Ответ: a. ◄

Преобразование рационального выражения можно выполнять не по отдельным действиям, а цепочкой. Проиллюстрируем сказанное на следующем примере.

Пример 2. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения $\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}$ не зависит от значения a.

Решение. Упростим данное выражение: $\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}=$

$$=\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{6(3-a)}\cdot\frac{54a}{a(5+a)}=\frac{3a}{a-3}+\frac{9}{3-a}=\frac{3a}{a-3}-\frac{9}{a-3}=\frac{3a-9}{a-3}=\frac{3(a-3)}{a-3}=3.$$

Следовательно, при всех допустимых значениях a значение данного выражения равно 3. ◄

Пример 3. Докажите тождество $\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{4}{a+1}$.

Решение. Преобразуем левую часть доказываемого равенства. Здесь целесообразно раскрыть скобки, применяя распределительное свойство умножения:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{a-7}{3a-1}\cdot\frac{3a-1}{a(a-7)}+\frac{a-7}{a+1}\cdot\frac{3a-1}{a(a-7)}=$$

$$=\frac{1}{a}^{\backslash a+1}+\frac{3a-1}{a(a+1)}=\frac{a+1+3a-1}{a(a+1)}=\frac{4a}{a(a+1)}=\frac{4}{a+1}.$$

Тождество доказано. ◄

Пример 4. Упростите выражение $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$.

Решение. Записав данное выражение в виде частного от деления числителя на знаменатель, получим:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}} = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) : \left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right) = \frac{bc+ac+ab}{abc} : \frac{c+a+b}{abc} =$$

$$= \frac{bc+ac+ab}{abc} \cdot \frac{abc}{c+a+b} = \frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Данное выражение можно упростить иным способом, используя основное свойство дроби, а именно: умножить её числитель и знаменатель на одночлен abc:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}} = \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)abc} = \frac{\frac{1}{a}\cdot abc+\frac{1}{b}\cdot abc+\frac{1}{c}\cdot abc}{\frac{1}{ab}\cdot abc+\frac{1}{bc}\cdot abc+\frac{1}{ac}\cdot abc} =$$

$$= \frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Ответ: $\dfrac{bc+ac+ab}{c+a+b}$. ◄

Упражнения

176. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{4}\right)\cdot\frac{6}{a^2}$;

2) $\frac{a^2b}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$;

3) $\left(1+\frac{a}{b}\right):\left(1-\frac{a}{b}\right)$;

4) $\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}+1\right)\cdot\frac{b}{a-b}$;

5) $\frac{a^2-ab}{b^2-1}\cdot\frac{b+1}{a}-\frac{a}{b-1}$;

6) $\left(\frac{5}{m-n}-\frac{4}{m+n}\right):\frac{m+9n}{m+n}$;

7) $\frac{x-2}{x+2}\cdot\left(x-\frac{x^2}{x-2}\right)$;

8) $\frac{x^2+x}{4}:\frac{x^2}{4}+\frac{x-1}{x}$;

9) $\frac{6c^2}{c^2-1}:\left(\frac{1}{c-1}+1\right)$;

10) $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)\cdot\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$.

177. Упростите выражение:

1) $\left(x+\frac{x}{y}\right):\left(x-\frac{x}{y}\right)$;

2) $\left(\frac{a}{b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\cdot\frac{ab^2}{a^2+b^2}$;

3) $\left(\frac{m}{m-1}-1\right):\frac{m}{mn-n}$;

4) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{4ab}{a-b}$;

5) $\frac{a}{b}-\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$;

6) $\frac{7x}{x+2}-\frac{x-8}{3x+6}\cdot\frac{84}{x^2-8x}$;

7) $\left(a-\frac{9a-9}{a+3}\right):\frac{a^2-3a}{a+3}$;

8) $\left(\frac{a}{a+2}-\frac{8}{a+8}\right)\cdot\frac{a^2+8a}{a-4}$.

178. Выполните действия:

1) $\frac{a+2}{a^2-2a+1}:\frac{a^2-4}{3a-3}-\frac{3}{a-2}$;

2) $\frac{b^2+3b}{b^3+9b}\cdot\left(\frac{b-3}{b+3}+\frac{b+3}{b-3}\right)$;

3) $\left(\frac{3c+1}{3c-1}-\frac{3c-1}{3c+1}\right):\frac{2c}{6c+2}$;

4) $\left(\frac{1}{a^2-4ab+4b^2}-\frac{1}{4b^2-a^2}\right):\frac{2a}{a^2-4b^2}$;

5) $\left(\frac{a-8}{a^2-10a+25}-\frac{a}{a^2-25}\right):\frac{a-20}{(a-5)^2}$;

6) $\left(\frac{2x+1}{x^2+6x+9}-\frac{x-2}{x^2+3x}\right):\frac{x^2+6}{x^3-9x}$.

179. Выполните действия:

1) $\frac{b+4}{b^2-6b+9}:\frac{b^2-16}{2b-6}-\frac{2}{b-4}$;

2) $\left(\frac{m-1}{m+1}-\frac{m+1}{m-1}\right):\frac{4m}{m^2-1}$;

3) $\frac{2x}{x^2-y^2}:\left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2}-\frac{1}{y^2-x^2}\right)$;

4) $\left(\frac{2a-3}{a^2-4a+4}-\frac{a-1}{a^2-2a}\right):\frac{a^2-2}{a^3-4a}$.

180. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{15}{x-7}-x-7\right)\cdot\frac{7-x}{x^2-16x+64}$;

2) $\left(a-\frac{5a-16}{a-3}\right):\left(2a-\frac{2a}{a-3}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{a}{b^2}\right)\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{2}{b-a}$;

4) $\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a+1}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right):\frac{a^2+a}{(a-1)^2}$;

5) $\left(\dfrac{x+2y}{x-2y}-\dfrac{x-2y}{x+2y}-\dfrac{16y^2}{x^2-4y^2}\right):\dfrac{4y}{x+2y}$;

6) $\left(\dfrac{3a-8}{a^2-2a+4}+\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{4a-28}{a^3+8}\right)\cdot\dfrac{a^2-4}{4}$.

181. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x^2+14x+49}{x+6}:\left(\dfrac{13}{x+6}-x+6\right)$;

2) $\left(c-\dfrac{2c-9}{c+8}\right):\dfrac{c^2+3c}{c^2-64}+\dfrac{24}{c}$;

3) $\left(\dfrac{36}{x^2-9}-\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{3+x}{3-x}\right):\dfrac{6}{3-x}$;

4) $\left(\dfrac{2y-1}{y^2+2y+4}+\dfrac{9y+6}{y^3-8}+\dfrac{1}{y-2}\right)\cdot\dfrac{y^2-4}{18}$.

182. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{ab}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{2b-2a}\right):\dfrac{2b}{a^2-b^2}=\dfrac{a-b}{4}$;

2) $\left(\dfrac{8a}{4-a^2}-\dfrac{a-2}{a+2}\right):\dfrac{a+2}{a}+\dfrac{2}{a-2}=-1$;

3) $\left(\dfrac{3}{36-c^2}+\dfrac{1}{c^2-12c+36}\right)\cdot\dfrac{(c-6)^2}{2}+\dfrac{3c}{c+6}=2$.

183. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{b}{a^2-ab}-\dfrac{2}{a-b}-\dfrac{a}{b^2-ab}\right):\dfrac{a^2-b^2}{4ab}=\dfrac{4}{a+b}$;

2) $\dfrac{(a-b)^2}{a}\cdot\left(\dfrac{a}{(a-b)^2}+\dfrac{a}{b^2-a^2}\right)+\dfrac{3a+b}{a+b}=3$.

184. Зависит ли значение выражения от значения входящей в него переменной:

1) $\left(\dfrac{a+3}{a^2-1}-\dfrac{1}{a^2+a}\right):\dfrac{3a+3}{a^2-a}$;

2) $\left(\dfrac{a}{a^2-49}-\dfrac{1}{a+7}\right):\dfrac{7a}{a^2+14a+49}-\dfrac{2}{a-7}$?

185. Докажите, что значение выражения не зависит от значения входящей в него переменной:

1) $\dfrac{3x^2-27}{4x^2+2}\cdot\left(\dfrac{6x+1}{x-3}+\dfrac{6x-1}{x+3}\right)$;

2) $\dfrac{3}{2a-3}-\dfrac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\dfrac{2a}{4a^2-12a+9}-\dfrac{3}{4a^2-9}\right)$.

186. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a-\dfrac{a^2}{a+1}}{a-\dfrac{a}{a+1}}$; 3) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}$;

2) $\dfrac{a-\dfrac{6a-9}{a}}{1-\dfrac{3}{a}}$; 4) $\dfrac{\dfrac{2a-b}{b}+1}{\dfrac{2a+b}{b}-1}+\dfrac{3-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{3a}{b}-1}$.

187. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a-b}{a}}$; 2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$.

188. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{a^2}{b^3-ab^2}+\dfrac{a-b}{b^2}-\dfrac{1}{b}\right):\left(\dfrac{a+b}{b-a}-\dfrac{b-a}{a+b}+\dfrac{6a^2}{a^2-b^2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{a+2}{4a^3-4a^2+a}-\dfrac{2-a}{1-8a^3}\cdot\dfrac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right):\left(\dfrac{1}{1-2a}\right)^2-\dfrac{8a-1}{2a^2+a}$.

189. Упростите выражение:

$\left(\dfrac{18y^2+3y}{27y^3-1}-\dfrac{3y+1}{9y^2+3y+1}\right):\left(1-\dfrac{3y-1}{y}-\dfrac{5-6y}{3y-1}\right)$.

190. Докажите тождество:

1) $\dfrac{16}{(a-2)^4}:\left(\dfrac{1}{(a-2)^2}-\dfrac{2}{a^2-4}+\dfrac{1}{(a+2)^2}\right)-\dfrac{8a}{(a-2)^2}=1$;

2) $\dfrac{a+11}{a+9}-\left(\dfrac{a+5}{a^2-81}+\dfrac{a+7}{a^2-18a+81}\right):\left(\dfrac{a+3}{a-9}\right)^2=1$.

191. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\dfrac{b^2+9}{3b^2-b^3}+\left(\dfrac{b+3}{b-3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{b-3}+\dfrac{6}{9-b^2}-\dfrac{3}{b^2+3b}\right)$ принимает положительные значения.

192. Подставьте вместо x данное выражение и упростите полученное выражение:

1) $\dfrac{x-a}{x-b}$, если $x=\dfrac{ab}{a+b}$; 2) $\dfrac{a-bx}{b+ax}$, если $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

Упражнения для повторения

193. Решите уравнение:
1) $(3x - 1)(4x + 5) - (2x + 3)(6x + 1) = 4$;
2) $8x(2x + 7) - (4x + 3)^2 = 15$.

194. Докажите, что значение выражения $2^{14} - 2^{12} - 2^{10}$ делится нацело на 11.

195. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ делится нацело на 10.

196. На первом складе было картофеля в 3 раза больше, чем на втором. Когда с первого склада вывезли 400 кг картофеля, то на нём осталось картофеля в 2 раза меньше, чем было на втором. Сколько килограммов картофеля было на первом складе первоначально?

197. Кастрюля стоила на 510 р. меньше, чем сковорода. Во время распродажи кастрюля подешевела на 10 %, а сковорода — на 20 %, после чего кастрюлю и сковороду вместе можно было приобрести за 1156 р. Какова первоначальная цена кастрюли и какова — сковороды?

198. Из пункта A в пункт B автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а возвращался из пункта B в пункт A со скоростью 70 км/ч другой дорогой, которая на 15 км короче первой. На обратный путь автомобиль затратил на 30 мин меньше, чем на путь из пункта A в пункт B. За какое время он доехал из пункта A в пункт B?

199. Рабочий должен был изготовлять ежедневно 10 деталей. Однако он изготовлял ежедневно 12 деталей, и уже за два дня до окончания срока работы ему осталось изготовить 6 деталей. Сколько деталей должен был изготовить рабочий?

200. (*Из русского фольклора.*) За 30 монет купили 30 птиц. Сколько купили птиц каждого вида, если за трёх воробьёв платили одну монету, за двух голубей — тоже одну монету, а за одну горлицу — две монеты, при этом купили хотя бы одну птичку каждого вида?

Готовимся к изучению новой темы

201. Решите уравнение:

1) $\dfrac{2x + 7}{4} = \dfrac{x + 5}{3}$;
2) $x^2 + 6x = 0$;
3) $0{,}21x - 0{,}7x^2 = 0$;
4) $x^2 - 16 = 0$;
5) $25x^2 - 36 = 0$;
6) $x^2 + 4 = 0$.

202. При каком значении переменной не имеет смысла выражение:

1) $\frac{6}{3x-9}$; 3) $\frac{x+4}{3x^2+12x}$; 5) $\frac{x}{x^2-10x+25}$;

2) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 4) $\frac{8}{x+7}+\frac{4}{x-2}$; 6) $\frac{x+2}{(x+10)(x-12)}$?

203. При каком значении переменной значение дроби равно нулю:

1) $\frac{x-8}{9}$; 2) $\frac{x-2}{x+2}$; 3) $\frac{4}{x-5}$?

Повторите содержание п. 14, 15 на с. 231—232.

Учимся делать нестандартные шаги

204. На доске написаны многочлены $x+2$ и $2x+1$. Разрешается записать сумму, разность или произведение любых двух из уже написанных многочленов. Может ли на доске появиться многочлен $2x^3+x+5$?

Задание № 2 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Представьте в виде дроби выражение $\frac{12m^4}{n^{10}} \cdot \frac{n^5}{36m^8}$.

А) $\frac{1}{3m^2n^2}$ Б) $\frac{1}{3m^4n^5}$ В) $\frac{3}{m^2n^2}$ Г) $\frac{3}{m^4n^5}$

2. Выполните умножение: $(a+5b) \cdot \frac{8}{a^2 - 25b^2}$.

А) $8(a-5b)$ Б) $8(a+5b)$ В) $\frac{8}{a+5b}$ Г) $\frac{8}{a-5b}$

3. Упростите выражение $\frac{b^2 - 6b + 9}{b-7} \cdot \frac{b-7}{b-3}$.

А) $b+3$ Б) $b-3$ В) $\frac{1}{b-3}$ Г) $\frac{1}{b+3}$

4. Выполните деление: $\frac{5a^6}{b^8} : (10a^3b^2)$.

А) $\frac{2a^9}{b^6}$ Б) $\frac{b^6}{2a^9}$ В) $\frac{2b^{10}}{a^3}$ Г) $\frac{a^3}{2b^{10}}$

5. Упростите выражение $\frac{3x+9}{x^2-2x} : \frac{x+3}{4x-8}$.

А) $\frac{12}{x}$ Б) $\frac{x}{12}$ В) 12 Г) x

6. Представьте в виде дроби выражение $\frac{n^2 - 3n}{64n^2 - 1} : \frac{n^4 - 27n}{64n^2 + 16n + 1}$.

А) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2+3n+9)}$ В) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2+3n+9)}$

Б) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2-3n+9)}$ Г) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2-3n+9)}$

7. Выполните возведение в степень: $\left(-\frac{2a^2}{b^3}\right)^4$.

А) $\frac{8a^8}{b^{12}}$ Б) $-\frac{8a^8}{b^{12}}$ В) $\frac{16a^8}{b^{12}}$ Г) $-\frac{16a^8}{b^{12}}$

8. Упростите выражение $\left(\frac{1}{a-6} - \frac{1}{a+6}\right) : \frac{2}{a+6}$.

А) $\frac{6}{a+6}$ Б) $\frac{6}{a-6}$ В) $6(a-6)$ Г) $6(a+6)$

9. Какому числу при всех допустимых значениях a равно значение выражения $\left(\frac{30a}{9a^2-25}+\frac{5}{5-3a}\right):\left(\frac{3a-5}{3a+5}-1\right)$?

А) $\frac{1}{2}$ Б) 2 В) $-\frac{1}{2}$ Г) −2

10. Чему равно значение выражения $\frac{a^2-4ab}{b^2}$, если $3a-5b=$ $=0{,}2(2a+b)$?

А) 4 Б) −4 В) 3 Г) −3

11. Известно, что $x+\frac{1}{x}=6$. Найдите значение выражения $x^2+\frac{1}{x^2}$.

А) 36 Б) 38 В) 34 Г) 35

12. Упростите выражение $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}}{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a}}$.

А) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ В) $\frac{a^2+b^2}{ab^2(a^2-b^2)}$

Б) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ Г) $\frac{ab(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$

§ 7. Равносильные уравнения. Рациональные уравнения

Рассмотрим два уравнения: $x^2 = 4$ и $|x| = 2$.

Очевидно, что эти уравнения имеют одни и те же корни: -2 и 2.

В таких случаях говорят, что уравнения $x^2 = 4$ и $|x| = 2$ **равносильны**.

Приведём ещё примеры пар равносильных уравнений:

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ и } 2x = 0;$$

$$2x = 4 \text{ и } 4x - 8 = 0;$$

$$x^2 = 1 \text{ и } (x - 1)(x + 1) = 0.$$

Рассмотрим уравнения $x^2 = -5$ и $|x| = -3$. Каждое из этих уравнений не имеет корней. Такие уравнения также принято считать равносильными.

Определение

Два уравнения называют равносильными, если они имеют одни и те же корни или каждое из уравнений не имеет корней.

Число 2 является корнем каждого из уравнений $(x - 2)(x + 1) = 0$ и $x - 2 = 0$. Однако эти уравнения не являются равносильными, так как корень -1 первого уравнения не является корнем второго уравнения.

В 7 классе вы изучили свойства уравнений с одной переменной. Теперь, используя понятие «равносильные уравнения», эти свойства можно сформулировать следующим образом.

Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Рассмотрим такую задачу. Автомобиль, проехав 180 км пути, увеличил скорость на 10 км/ч и оставшийся путь длиной 210 км проехал за то же время, что и первую часть пути. Найдите начальную скорость автомобиля.

Пусть x км/ч — искомая скорость. Тогда скорость автомобиля на второй части пути равна $(x + 10)$ км/ч. Автомобиль преодолел первую часть пути за $\frac{180}{x}$ ч, а вторую — за $\frac{210}{x + 10}$ ч.

Уравнение $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$ является математической моделью рассмотренной реальной ситуации. Обе части полученного уравнения являются рациональными выражениями.

Определение

Уравнение, левая и правая части которого являются рациональными выражениями, называют рациональным.

Из определения следует, что, решая задачу, мы получили рациональное уравнение.

Отметим, что линейное уравнение с одной переменной, то есть уравнение вида $ax = b$, является рациональным.

Рассмотрим рациональное уравнение вида $\frac{A}{B} = 0$, где A и B — многочлены.

Вы знаете, что *дробь равна нулю тогда и только тогда, когда её числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля*. Поэтому, чтобы решить уравнение вида $\frac{A}{B} = 0$, нужно потребовать *одновременного* выполнения двух условий: $A = 0$ и $B \neq 0$. Это значит, что при решении уравнений указанного вида следует руководствоваться таким алгоритмом:

- решить уравнение $A = 0$;
- проверить, какие из найденных корней удовлетворяют условию $B \neq 0$;
- корни, удовлетворяющие условию $B \neq 0$, включить в ответ.

Пример 1. Решите уравнение $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2 - 4x + 3} = 0$.

Решение. Приравняем числитель дроби, стоящей в левой части уравнения, к нулю. Имеем: $(x - 1)(x + 1) = 0$. Корнями этого уравнения являются числа -1 и 1.

Проверим, удовлетворяют ли эти корни условию $x^2 - 4x + 3 \neq 0$.

При $x = -1$ получаем, что $x^2 - 4x + 3 = 8 \neq 0$.

При $x = 1$ получаем, что $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Следовательно, число -1 является корнем данного уравнения, а число 1 — нет.

Ответ: -1. ◄

Как мы уже отмечали выше, решение уравнения вида $\frac{A}{B} = 0$ сводится к решению уравнения $A = 0$ и проверке условия $B \neq 0$. В таких случаях говорят, что уравнение $\frac{A}{B} = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0. \end{cases}$$

Например, уравнение $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3} = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} (x-1)(x+1) = 0, \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0. \end{cases}$$

Как мы выяснили, решением этой системы является число −1.

Завершим решение задачи об автомобиле. Имеем:

$$\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}.$$

Переходим к равносильному уравнению

$$\frac{180}{x} - \frac{210}{x+10} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{180(x+10) - 210x}{x(x+10)} = 0;$$

$$\frac{1800 - 30x}{x(x+10)} = 0.$$

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1800 - 30x = 0, \\ x(x+10) \neq 0. \end{cases}$$

Корнем уравнения, входящего в систему, является число 60; очевидно, что оно удовлетворяет условию $x(x+10) \neq 0$.

Ответ: 60 км/ч.

Как известно, любое рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби. Поэтому любое рациональное уравнение можно свести к уравнению вида $\dfrac{A}{B} = 0$. Именно так мы и сделали, решая уравнение $\dfrac{180}{x} = \dfrac{210}{x+10}$.

Пример 2. Решите уравнение $\dfrac{3x+5}{6x+3} + \dfrac{1}{4x^2-1} = \dfrac{x}{2x-1}$.

Решение. Имеем: $\dfrac{3x+5}{3(2x+1)} + \dfrac{1}{(2x-1)(2x+1)} - \dfrac{x}{2x-1} = 0$. Представив левую часть этого уравнения в виде рациональной дроби, получим:

$$\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)} = 0.$$

Полученное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 4x - 2 = 0, \\ 3(2x-1)(2x+1) \neq 0. \end{cases}$

Перепишем эту систему так: $\begin{cases} 4x - 2 = 0, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x = 0,5, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$

Следовательно, исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет. ◄

Пример 3. Решите уравнение $\dfrac{2x^2 - 4x - 16}{x - 4} - x = 0.$

Решение. Представим левую часть уравнения в виде дроби:

$$\frac{2x^2 - 4x - 16 - x^2 + 4x}{x - 4} = 0;$$

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = 0.$$

Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ x - 4 \neq 0, \end{cases}$$

откуда получаем:

$$\begin{cases} x = 4 \text{ или } x = -4, \\ x \neq 4; \end{cases}$$

$$x = -4.$$

Ответ: –4. ◄

Рассмотрим задачу, в которой рациональное уравнение является математической моделью реальной ситуации.

Пример 4. Турист проплыл на лодке 3 км по течению реки и 2 км против течения за 30 мин. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения равна 2 км/ч.

Решение. Пусть скорость лодки в стоячей воде равна x км/ч. Тогда её скорость по течению реки равна $(x + 2)$ км/ч, а против течения — $(x - 2)$ км/ч. Турист проплыл 3 км по течению за $\dfrac{3}{x+2}$ ч, а 2 км против течения — за $\dfrac{2}{x-2}$ ч. Поскольку весь путь был пройден за 30 мин $= \dfrac{1}{2}$ ч, то $\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{1}{2}$.

Решим полученное уравнение:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{3x - 6 + 2x + 4}{x^2 - 4} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\frac{10x - 4 - x^2 + 4}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\frac{10x - x^2}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 = 0, \\ 2(x^2 - 4) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(10 - x) = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ или } x = 10.$$

Корень 0 не соответствует смыслу задачи. Следовательно, скорость лодки в стоячей воде равна 10 км/ч.

Ответ: 10 км/ч. ◄

1. Какие два уравнения называют равносильными?

2. С помощью каких преобразований данного уравнения можно получить уравнение, ему равносильное?

3. Какое уравнение называют рациональным?

4. Сформулируйте условие равенства дроби нулю.

5. Опишите алгоритм решения уравнения вида $\frac{A}{B} = 0$, где A и B — многочлены.

Упражнения

205. Истинным или ложным является высказывание:

1) уравнения $x + 2 = 10$ и $3x = 24$ равносильны;

2) уравнения $-2x = -6$ и $\frac{1}{3}x = 1$ равносильны;

3) уравнения $x - 5 = 0$ и $x(x - 5) = 0$ равносильны;

4) уравнения $(3x - 12)(x + 2) = 0$ и $(0{,}4 - 0{,}1x)(7x + 14) = 0$ равносильны;

5) уравнения $\frac{6}{x} = 0$ и $x^2 = -4$ равносильны;

6) уравнения $x + 1 = 1 + x$ и $\frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$ равносильны?

206. Составьте уравнение, равносильное данному:

1) $2x - 3 = 4$; 2) $|x| = 1$; 3) $x + 6 = x - 2$.

207. Решите уравнение:

1) $\frac{x-6}{x-4} = 0$;

2) $\frac{x-2}{x^2-4} = 0$;

3) $\frac{x^2-4}{x-2} = 0$;

4) $\frac{x-2}{x-2} = 1$;

5) $\frac{2x^2+18}{x^2+9} = 2$;

6) $\frac{x}{x-5} + \frac{2x-9}{x-5} = 0$;

7) $\frac{5x-7}{x+1} - \frac{x-5}{x+1} = 0$;

8) $\frac{2x+16}{x+3} - \frac{1-3x}{x+3} = 0$;

9) $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 0$;

10) $\frac{3}{x-2} = \frac{4}{x+3}$;

11) $\frac{x}{x-6} = 2$;

12) $\frac{x-4}{x-3} = \frac{2x+1}{2x-1}$;

13) $\frac{x+8}{x} - \frac{6}{x-2} = 0$;

14) $\frac{2x}{x-5} - \frac{x^2+15x}{x^2-25} = 0$;

15) $3 - \frac{2x^2-5x}{x^2-3x} = 0$.

208. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = 0$;

2) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = 0$;

3) $\frac{x+7}{x-7} - \frac{2x-3}{x-7} = 0$;

4) $\frac{10-3x}{x+8} + \frac{5x+6}{x+8} = 0$;

5) $\frac{x-6}{x-2} - \frac{x-8}{x} = 0$;

6) $\frac{2x-4}{x} - \frac{3x+1}{x} + \frac{x+5}{x} = 0$;

7) $\frac{x}{x+6} - \frac{36}{x^2+6x} = 0$;

8) $\frac{2x^2+3x+1}{2x+1} - x = 1$;

9) $\frac{4}{x-1} - \frac{4}{x+1} = 1$.

209. Какое число нужно вычесть из числителя и знаменателя дроби $\frac{15}{19}$, чтобы получить дробь, равную $\frac{2}{3}$?

210. Какое число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{25}{32}$, чтобы получить дробь, равную $\frac{5}{6}$?

211. Составьте пару равносильных уравнений, каждое из которых:

1) имеет один корень;
2) имеет два корня;
3) имеет бесконечно много корней;
4) не имеет корней.

212. Решите уравнение:

1) $\frac{5}{x^2-4}+\frac{2x}{x+2}=2;$

2) $\frac{2}{6x+1}+\frac{3}{6x-1}=\frac{30x+9}{36x^2-1};$

3) $\frac{6x+14}{x^2-9}+\frac{7}{x^2+3x}=\frac{6}{x-3};$

4) $\frac{2y^2+5}{1-y^2}+\frac{y+1}{y-1}=\frac{4}{y+1};$

5) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{4}{1-4x^2};$

6) $\frac{7}{(x+2)(x-3)}-\frac{4}{(x-3)^2}=\frac{3}{(x+2)^2};$

7) $\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}=\frac{6x+64}{x^2-16}+4;$

8) $\frac{2x-6}{x^2-36}-\frac{x-3}{x^2-6x}-\frac{x-1}{x^2+6x}=0.$

213. Решите уравнение:

1) $\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{1-x}=\frac{x^2+27}{x^2-1};$

2) $\frac{3x+1}{3x-1}-\frac{3x-1}{3x+1}=\frac{6}{1-9x^2};$

3) $\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{5}{x-2};$

4) $\frac{2x^2-2x}{x^2-4}+\frac{6}{x+2}=\frac{x+2}{x-2};$

5) $\frac{7}{x^2+2x}+\frac{x+1}{x^2-2x}=\frac{x+4}{x^2-4};$

6) $\frac{x^2-9x+50}{x^2-5x}=\frac{x+1}{x-5}+\frac{x-5}{x}.$

214. Моторная лодка проплыла 8 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 54 мин. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 18 км/ч.

215. Теплоход прошёл 28 км против течения реки и вернулся обратно, потратив на обратный путь на 4 мин меньше. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

216. Лодка прошла 6 км против течения реки и 12 км по течению, потратив на весь путь 2 ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки составляет 3 км/ч.

217. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x+5}{x^2-5x}-\dfrac{x-5}{2x^2+10x}=\dfrac{x+25}{2x^2-50}$;

2) $\dfrac{2}{x^2-9}-\dfrac{1}{2x^2-12x+18}=\dfrac{3}{2x^2+6x}$;

3) $\dfrac{9x+12}{x^3-64}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x^2+4x+16}$.

218. Решите уравнение:

1) $\dfrac{4y+24}{5y^2-45}+\dfrac{y+3}{5y^2-15y}=\dfrac{y-3}{y^2+3y}$;

2) $\dfrac{y+2}{8y^3+1}-\dfrac{1}{4y+2}=\dfrac{y+3}{8y^2-4y+2}$.

219. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $\dfrac{x-1}{x-a}=0$;

2) $\dfrac{x-a}{x+5}=0$;

3) $\dfrac{a(x-a)}{x-3}=0$;

4) $\dfrac{(x-a)(x-6)}{x-7}=0$;

5) $\dfrac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$;

6) $\dfrac{x-a}{(x-4)(x+2)}=0$.

220. При каких значениях a уравнение $\dfrac{x+a}{x^2-4}=0$ не имеет корней?

221. При каких значениях a уравнение $\dfrac{(x-a)(x-3a)}{x+9}=0$ имеет один корень?

Упражнения для повторения

222. На конец года численность населения города составляла 72 100 жителей. Определите количество жителей в этом городе на начало года, если прирост населения за это время составил 3 %.

223. Расстояние между двумя станциями электропоезд проходит за 45 мин. Если его скорость увеличить на 10 км/ч, то он пройдёт это расстояние за 40 мин. Чему равно расстояние между станциями?

224. Докажите, что при любом значении переменной (переменных) выражение принимает неотрицательное значение:

1) $(a-5)^2-2(a-5)+1$;

2) $(a-b)(a-b-8)+16$.

225. Найдите значение функции $f(x) = 3x - 7$ при: 1) $x = -3$; 2) $x = 2\frac{1}{3}$. При каком значении аргумента значение функции равно 0,2?

Готовимся к изучению новой темы

226. Найдите значение выражения:

1) $4^3 + 3^4$;
3) $9 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)^2$;
2) $(-8)^2 - (-1)^{12}$;
4) $(2{,}8 - 3{,}1)^3 \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right)^2$.

227. Не выполняя вычислений, сравните значения выражений:
1) $(-5{,}7)^2$ и 0;
3) $(-23)^5$ и $(-2)^4$;
2) 0 и $(-6{,}9)^3$;
4) -8^8 и $(-8)^8$.

228. Представьте в виде степени:
1) с основанием 2 числа 4; 8; 16; 32; 64;
2) с основанием 10 числа 100; 1000; 10 000; 1 000 000.

229. Найдите значение выражения:

1) $18a^2$, если $a = -\frac{1}{6}$;
3) $6 + b^4$, если $b = -2$;
2) $(18a)^2$, если $a = -\frac{1}{6}$;
4) $(6 + b)^4$, если $b = -2$.

Повторите содержание п. 3 на с. 228—229.

Учимся делать нестандартные шаги

230. Существует ли натуральное число, которое при умножении на 2 становится квадратом натурального числа, а при умножении на 3 — кубом натурального числа?

§ 8. Степень с целым отрицательным показателем

Часто для записи больших чисел в компактном виде используют степень с натуральным показателем. Например:

$$129\,140\,163 = 3^{17},$$

$$282\,475\,249 = 7^{10}.$$

В науке и практике для короткой записи значений величин часто используют степень числа 10.

Например, расстояние от Земли до Полярной звезды приблизительно равно 4 470 000 000 000 000 км, или $4{,}47 \cdot 10^{15}$ км. Масса Солнца равна 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 кг, или $1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг.

Это были примеры из макромира, то есть мира очень больших физических величин. Приведём примеры из микромира, то есть мира очень маленьких физических величин.

Масса атома водорода равна 0,000000000000000000000000001674 кг.

Радиус атома кислорода равен 0,0000000066 см.

Для записи этих величин точно так же можно использовать степень числа 10. Имеем:

$$0{,}000000000000000000000000001674 \text{ кг} = \frac{1{,}674}{10^{27}} \text{ кг},$$

$$0{,}0000000066 \text{ см} = \frac{6{,}6}{10^{9}} \text{ см}.$$

Однако если договориться обозначить $\frac{1}{10^{27}}$ и $\frac{1}{10^{9}}$ соответственно 10^{-27} и 10^{-9}, то для рассмотренных величин получим «одноэтажную» форму записи: $\frac{1{,}674}{10^{27}} = 1{,}674 \cdot 10^{-27}$, $\frac{6{,}6}{10^{9}} = 6{,}6 \cdot 10^{-9}$.

Аналогично можно договориться, что, например, $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$, $\frac{1}{(-3)^5} = (-3)^{-5}$, $\frac{1}{0{,}7} = (0{,}7)^{-1}$.

Определение

Для любого числа a, не равного нулю, и натурального числа n

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}.$$

Из определения следует, что, например, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$,

$$(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16,\ (0{,}3)^{-1} = \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3}.$$

Итак, мы можем возводить число в любую целую степень, кроме нуля. Заполним этот пробел.

Определение

Для любого числа a, не равного нулю, $a^0 = 1$.

Например, $5^0 = 1$, $(-17)^0 = 1$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$.

Замечание. Выражение 0^n при целых n, меньших или равных нулю, не имеет смысла.

Из данных определений следует, что при любом $a \neq 0$ и целом n чи́сла a^n и a^{-n} являются взаимно обратными. Поэтому равенство

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

выполняется при любом целом n.

Например, при $n = -2$ имеем $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$.

В справочной литературе вы можете найти следующую информацию: «Масса Венеры равна $4{,}9 \cdot 10^{24}$ кг. Масса Марса равна $6{,}423 \cdot 10^{23}$ кг. Площадь поверхности Луны равна $3{,}8 \cdot 10^7$ км^2». Числа, выражающие эти величины, записаны в так называемом **стандартном виде**.

Определение

Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число.

Число n называют **порядком числа**, записанного в стандартном виде. Например, порядок числа, выражающего массу Солнца в килограммах, равен 30, а порядок числа, выражающего массу атома водорода в килограммах, равен -27.

В стандартном виде можно записать любое положительное число. Например, $171{,}25 = 1{,}7125 \cdot 10^2$; $0{,}00958 = 9{,}58 \cdot 10^{-3}$. Однако на практике стандартный вид числа обычно используют для записи больших и малых значений величин. При этом порядок числа даёт представление о величине. Например, если порядок числа m равен 3, то есть $m = a \cdot 10^3$, то с учётом того, что $1 \leqslant a < 10$, получаем: $10^3 \leqslant m < 10^4$.

Пример 1. Найдите значение выражения: 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; 2) $1{,}2^{-2}$; 3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0$.

Решение. 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$.

И вообще, **если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.**

2) $1{,}2^{-2} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^{2} = \frac{25}{36}$.

3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0 = \frac{1}{3^3} \cdot 15 + \frac{1}{6^2} \cdot 8 - 1 = \frac{1}{27} \cdot 15 + \frac{1}{36} \cdot 8 - 1 =$
$= \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{2}{9}$. ◄

Пример 2. Представьте выражение $(a - b)^{-2}(a^{-2} - b^{-2})$ в виде рациональной дроби.

Решение. $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2}) = \dfrac{1}{(a-b)^2} \cdot \left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right) = \dfrac{1}{(a-b)^2} \cdot \dfrac{b^2 - a^2}{a^2b^2} =$

$= \dfrac{1}{(b-a)^2} \cdot \dfrac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2} = \dfrac{b+a}{a^2b^2(b-a)} = \dfrac{b+a}{a^2b^3 - a^3b^2}$. ◄

Пример 3. Запишите в стандартном виде число: 1) 564 000 000; 2) 0,0036.

Решение. 1) $564\,000\,000 = 5{,}64 \cdot 100\,000\,000 = 5{,}64 \cdot 10^8$.

2) $0{,}0036 = 3{,}6 \cdot 0{,}001 = 3{,}6 \cdot \dfrac{1}{1000} = 3{,}6 \cdot \dfrac{1}{10^3} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$. ◄

1. Чему равно a^{-n} для любого отличного от нуля числа a и натурального числа n?
2. Чему равна нулевая степень любого отличного от нуля числа?
3. Что называют стандартным видом числа?
4. Как в записи числа в стандартном виде $a \cdot 10^n$ называют число n?

Упражнения

231. Какому из выражений равно выражение a^{-6}:

1) $-a^6$; 2) $\dfrac{1}{a^{-6}}$; 3) $\dfrac{1}{a^6}$; 4) $-\dfrac{1}{a^6}$?

232. Представьте степень в виде дроби:

1) 3^{-8}; 3) a^{-9}; 5) 12^{-1}; 7) $(a-b)^{-2}$;
2) 5^{-6}; 4) d^{-3}; 6) m^{-1}; 8) $(2x-3y)^{-4}$.

233. Замените степень дробью:

1) 14^{-4}; 2) p^{-20}; 3) $(m+n)^{-1}$; 4) $(4c-5d)^{-10}$.

234. Представьте дробь в виде степени с целым отрицательным показателем или в виде произведения степеней:

1) $\dfrac{1}{7^2}$; 3) $\dfrac{1}{c}$; 5) $\dfrac{a}{b}$; 7) $\dfrac{(a+b)^5}{(c-d)^8}$;

2) $\dfrac{1}{x^5}$; 4) $\dfrac{m}{n^3}$; 6) $\dfrac{x^6}{y^7}$; 8) $\dfrac{(x-y)^2}{x+y}$.

235. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем или произведением степеней:

1) $\dfrac{1}{11^{11}}$; 2) $\dfrac{1}{k^4}$; 3) $\dfrac{x^2}{y}$; 4) $\dfrac{m^6}{n^6}$; 5) $\dfrac{(2x-y)^3}{(x-2y)^9}$.

236. Представьте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ в виде степени с основанием: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

237. Представьте в виде степени однозначного натурального числа дробь:
1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

238. Представьте в виде степени с основанием 10 число:
1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

239. Представьте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ в виде степени с основанием: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

240. Вычислите:
1) 5^{-2}; 3) $(-9)^{-2}$; 5) 1^{-24}; 7) $(-1)^{-17}$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
2) 2^{-4}; 4) $0{,}2^{-3}$; 6) $(-1)^{-16}$; 8) $\left(\frac{7}{8}\right)^{0}$; 10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

241. Найдите значение выражения:
1) 20^{-2}; 3) $(-6)^{-3}$; 5) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$;
2) $0{,}3^{-1}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

242. Вычислите значение выражения:
1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 4) $9 \cdot 0{,}1^{-1}$;
2) $2^{-3} + 6^{-2}$; 5) $0{,}5^{-2} \cdot 4^{-1}$;
3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2{,}3)^{0} - 5^{-2}$; 6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

243. Чему равно значение выражения:
1) $2^{-2} + 2^{-1}$; 3) $0{,}03^{0} + 0{,}7^{0}$;
2) $3^{-2} - 6^{-1}$; 4) $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$?

244. Какое из данных чисел записано в стандартном виде:
1) $12 \cdot 10^{4}$; 2) $1{,}2 \cdot 10^{4}$; 3) $0{,}12 \cdot 10^{4}$?

245. Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:
1) 3400; 4) 0,000008; 7) $0{,}86 \cdot 10^{3}$;
2) 15; 5) 0,73; 8) $0{,}23 \cdot 10^{4}$;
3) 0,0046; 6) $250 \cdot 10^{2}$; 9) $9300 \cdot 10^{5}$.

246. Запишите числовые значения величин в стандартном виде:
1) скорость света в вакууме равна 300 000 км/с;
2) длина реки Лена, самой протяжённой реки России, равна 4400 км;
3) площадь озера Байкал составляет 32 000 км^2;

4) расстояние от Земли до Солнца составляет 149,6 млн км;
5) атмосферное давление на высоте 100 км составляет 0,032 Па;
6) диаметр молекулы воды равен 0,00000028 мм.

247. Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:
1) 45 000; 2) 260; 3) 0,00024; 4) 0,032; 5) $0{,}059 \cdot 10^8$; 6) $526 \cdot 10^4$.

248. Запишите значение выражения в виде натурального числа или десятичной дроби:
1) $1{,}6 \cdot 10^3$; 2) $5{,}7 \cdot 10^6$; 3) $2{,}1 \cdot 10^{-2}$; 4) $1{,}1 \cdot 10^{-5}$.

249. Запишите значение выражения в виде натурального числа или десятичной дроби:
1) $2{,}4 \cdot 10^2$; 2) $4{,}8 \cdot 10^5$; 3) $1{,}4 \cdot 10^{-3}$; 4) $8{,}6 \cdot 10^{-4}$.

250. Докажите, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

251. Найдите значение выражения:
1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 10^{-1} + 9^0 - (-2)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} \cdot (-1{,}5)^{-3}$;
2) $(2{,}5)^{-2} - (8^5)^0 + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} + 0{,}1^{-1}$.

252. Расположите в порядке убывания:
1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; 2) $4^{-1}, 4^3, 4^0, 4^{-2}$.

253. Расположите в порядке возрастания:
1) $7^{-2}, 7^2, 7^{-1}, 7^0$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \left(\frac{1}{3}\right)^0, \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

254. Сравните значения выражений:
1) 12^0 и $(-6)^0$;
2) $0{,}2^3$ и $0{,}2^{-3}$;
3) 4^6 и $0{,}25^{-6}$;
4) $3^{-1} \cdot 7^{-1}$ и 21^{-1};
5) $5^{-1} - 7^{-1}$ и 2^{-1};
6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ и $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$.

255. Сравните значения выражений:
1) 3^{-2} и $(-3)^0$;
2) $3^{-1} + 2^{-1}$ и 5^{-1};
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$.

256. Представьте в виде дроби выражение:
1) $ab^{-1} + a^{-1}b$;
2) $3a^{-1} + ab^{-2}$;
3) $m^2n^2(m^{-3} - n^{-3})$;
4) $(a + b)^{-1} \cdot (a^{-1} + b^{-1})$;
5) $(c^{-2} - d^{-2}) : (c + d)$;
6) $(xy^{-2} + x^{-2}y) \cdot \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x}\right)^{-1}$.

257. Представьте в виде дроби выражение:

1) $a^{-2} + a^{-3}$;
2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;
3) $(c^{-1} - d^{-1}) \cdot (c - d)^{-2}$;
4) $(x^{-2} + y^{-2}) \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$.

258. Порядок некоторого натурального числа равен 4. Сколько цифр содержит десятичная запись этого числа?

259. Десятичная запись некоторого натурального числа состоит из семи цифр. Чему равен порядок этого числа?

260. Какое число больше:

1) $9{,}7 \cdot 10^{11}$ или $1{,}2 \cdot 10^{12}$;
2) $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ или $4{,}8 \cdot 10^{-6}$;
3) $2{,}34 \cdot 10^{6}$ или $0{,}23 \cdot 10^{7}$;
4) $42{,}7 \cdot 10^{-9}$ или $0{,}072 \cdot 10^{-7}$?

261. Какое число меньше:

1) $6{,}1 \cdot 10^{19}$ или $6{,}15 \cdot 10^{18}$;
2) $1{,}5 \cdot 10^{-9}$ или $0{,}9 \cdot 10^{-8}$?

262. В таблице приведены расстояния от Солнца до планет Солнечной системы.

Планета	Расстояние, км
Венера	$1{,}082 \cdot 10^8$
Земля	$1{,}495 \cdot 10^8$
Марс	$2{,}280 \cdot 10^8$
Меркурий	$5{,}790 \cdot 10^7$
Нептун	$4{,}497 \cdot 10^9$
Сатурн	$1{,}427 \cdot 10^9$
Уран	$2{,}871 \cdot 10^9$
Юпитер	$7{,}781 \cdot 10^8$

1) Какая планета находится на наименьшем расстоянии от Солнца, а какая — на наибольшем?
2) Какая из планет, Марс или Сатурн, находится дальше от Солнца?
3) Составьте таблицу, записав в левом столбце названия планет в порядке увеличения расстояния от них до Солнца, а в правом — расстояния от них до Солнца, выраженные в миллионах километров.

263. В таблице приведены массы атомов некоторых химических элементов.

1) Масса атома какого из данных элементов наименьшая, а какого — наибольшая?
2) Масса атома какого из элементов, меди или натрия, больше?

Элемент	Масса атома, кг	Элемент	Масса атома, кг
Азот	$2{,}32 \cdot 10^{-26}$	Золото	$3{,}27 \cdot 10^{-25}$
Алюминий	$4{,}48 \cdot 10^{-26}$	Медь	$1{,}05 \cdot 10^{-25}$
Водород	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$	Натрий	$3{,}81 \cdot 10^{-26}$
Гелий	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	Олово	$1{,}97 \cdot 10^{-25}$
Железо	$9{,}28 \cdot 10^{-26}$	Уран	$3{,}95 \cdot 10^{-25}$

3) Составьте таблицу, упорядочив элементы в порядке уменьшения массы их атомов.

264. В таблице приведены запасы некоторых веществ в минеральных ресурсах мира.

Вещество	Запасы, т	Вещество	Запасы, т
Алюминий	$1{,}1 \cdot 10^{9}$	Никель	$6{,}8 \cdot 10^{7}$
Вольфрам	$1{,}3 \cdot 10^{6}$	Олово	$4{,}76 \cdot 10^{6}$
Железо	$8{,}8 \cdot 10^{10}$	Ртуть	$1{,}15 \cdot 10^{5}$
Золото	$1{,}1 \cdot 10^{4}$	Фосфаты	$1{,}98 \cdot 10^{10}$
Марганец	$6{,}35 \cdot 10^{8}$	Хром	$4{,}4 \cdot 10^{9}$
Медь	$2{,}8 \cdot 10^{9}$	Цинк	$1{,}12 \cdot 10^{8}$

1) Запасы какого из данных веществ наибольшие, а какого — наименьшие?
2) Запасы какого из веществ, никеля или цинка, больше?
3) Составьте таблицу минеральных ресурсов, разместив вещества в порядке уменьшения их запасов.

Упражнения для повторения

265. Масса чугунной болванки 16 кг. Какое наименьшее количество болванок потребуется, чтобы отлить 41 деталь массой 12 кг каждая?

266. В некотором городе на сегодняшний день проживает 88 200 жителей. Сколько жителей было в этом городе 2 года назад, если ежегодный прирост населения составлял 5 %?

267. Дима ходит из дома на стадион пешком со скоростью 4 км/ч. Если он поедет на стадион на велосипеде со скоростью 12 км/ч, то приедет на 20 мин раньше, чем обычно. На каком расстоянии от дома Димы находится стадион?

268. Упростите выражение

$$\frac{2a^2+2}{a^2-1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{3a-3}{2a+2}.$$

269. Можно ли утверждать, что при любом натуральном n значение выражения $(5n+6{,}5)^2-(2n+0{,}5)^2$ кратно 42?

Готовимся к изучению новой темы

270. Представьте в виде степени с основанием a выражение:

1) $a^7 \cdot a^5$; 2) $a^7 : a^5$; 3) $(a^7)^5$; 4) $\frac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$.

271. Упростите выражение:

1) $-4m^3n^5 \cdot 5m^4n^2$; 2) $(-2m^7n^2)^4$; 3) $8x^3y^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2y^5\right)^3$.

272. Найдите значение выражения:

1) $\frac{3^{10} \cdot 27^3}{9^9}$; 2) $\left(5\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^8$.

Повторите содержание п. 4 на с. 229.

Учимся делать нестандартные шаги

273. В некотором доме живут только супружеские пары с маленькими детьми, причём у каждого мальчика есть сестра и мальчиков больше, чем девочек. Может ли взрослых быть больше, чем детей?

§ 9. Свойства степени с целым показателем

В 7 классе вы изучали свойства степени с натуральным показателем. Они остаются справедливыми и для степени с любым целым показателем.

Теорема 9.1

Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \qquad (2)$$

Теорема 9.2

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняется равенство:

$$(ab)^n = a^n b^n. \qquad (3)$$

Равенство (1) выражает **основное свойство степени**. Докажем его.

Для натуральных m и n это равенство уже было доказано в курсе алгебры 7 класса.

Рассмотрим теперь случай, когда m и n — целые отрицательные числа.

Если m и n — целые отрицательные числа, то $-m$ и $-n$ — натуральные числа. Тогда $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}$.

Имеем: $a^m \cdot a^n = \dfrac{1}{a^{-m}} \cdot \dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-m-n}} = \dfrac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$.

Для завершения доказательства основного свойства степени следует также рассмотреть такие случаи: один из показателей степени m или n отрицательный, а другой — положительный; один или оба показателя равны нулю. Рассмотрите эти случаи самостоятельно.

Равенства (2) и (3) доказывают аналогично.

С помощью свойства (1) докажем следующую теорему.

Теорема 9.3

Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n выполняется равенство:

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \qquad (4)$$

Доказательство

Имеем: $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$. ◄

С помощью свойств (2) и (3) докажем следующую теорему.

Теорема 9.4

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняется равенство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (5)$$

Доказательство

Имеем: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \left(a \cdot b^{-1}\right)^n = a^n \cdot \left(b^{-1}\right)^n = a^n \cdot b^{-n} = \dfrac{a^n}{b^n}$. ◄

Свойства (1)–(5) называют **свойствами степени с целым показателем**.

Пример 1. Представьте в виде степени с основанием a выражение: 1) $a^{-14} \cdot a^{12}$; 2) $a^{-5} : a^{-9}$; 3) $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^{6}$.

Решение. 1) Применив основное свойство степени, получаем:
$a^{-14} \cdot a^{12} = a^{-14+12} = a^{-2}$.

2) Используя равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$, получаем:
$a^{-5} : a^{-9} = a^{-5-(-9)} = a^{-5+9} = a^4$.

3) Применив последовательно правила возведения степени в степень (свойство (2)), умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями (свойства (1) и (4)), получаем:
$(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6 = a^{-4 \cdot (-2)} \cdot a^{-7} : a^6 = a^8 \cdot a^{-7} : a^6 = a^{8+(-7)-6} = a^{-5}$. ◄

Пример 2. Найдите значение выражения:

1) $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3}$; 2) $16^{-9} \cdot 8^{12}$; 3) $\dfrac{6^{-3}}{18^{-3}}$; 4) $\left(1\dfrac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\dfrac{5}{6}\right)^3\right)^{-5}$.

Решение. 1) Имеем: $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3} = 5^{20} : 5^{21} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$.

2) Представив числа 16 и 8 в виде степеней с основанием 2, получаем:
$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^4)^{-9} \cdot (2^3)^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^0 = 1$.

3) Используя правило возведения дроби в степень (свойство (5)), получаем: $\dfrac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\dfrac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$.

4) $\left(1\dfrac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\dfrac{5}{6}\right)^3\right)^{-5} = \left(\dfrac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\dfrac{6}{5}\right)^2\right)^{-8} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-15} =$

$= \left(\dfrac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{16} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-15} = \dfrac{5}{6}$. ◄

Пример 3. Упростите выражение:

1) $0{,}6m^2n^{-6} \cdot \dfrac{1}{3}m^{-4}n^3$; 2) $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6)$.

Решение. 1) $0{,}6m^2n^{-6} \cdot \dfrac{1}{3}m^{-4}n^3 = \left(0{,}6 \cdot \dfrac{1}{3}\right) \cdot (m^2 \cdot m^{-4}) \cdot (n^{-6} \cdot n^3) =$
$= 0{,}2m^{-2}n^{-3}$.

2) $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6) = a^{-4} - 4a^{-2} + 9a^{-2} - 36 - a^{-4} + 36 =$
$= 5a^{-2}$. ◄

Пример 4. Выполните умножение $(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8})$ и результат запишите в стандартном виде.

Решение. $(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) = (3{,}4 \cdot 7) \cdot (10^{14} \cdot 10^{-8}) = 23{,}8 \cdot 10^{6} = 2{,}38 \cdot 10 \cdot 10^{6} = 2{,}38 \cdot 10^{7}$. ◄

Сформулируйте свойства степени с целым показателем.

Упражнения

274. Представьте выражение в виде степени с основанием a или произведения степеней с разными основаниями:

1) $a^{-6} \cdot a^{9}$;
2) $a^{5} \cdot a^{-8}$;
3) $a^{-5} \cdot a^{10} \cdot a^{-12}$;
4) $a^{-2} : a^{6}$;
5) $a^{7} : a^{-3}$;
6) $a^{-3} : a^{-15}$;
7) $a^{12} \cdot a^{-20} : a^{-9}$;
8) $(a^{-5})^{4}$;
9) $(a^{-6})^{-8}$;
10) $(a^{2})^{-4} \cdot (a^{-3})^{-2} : (a^{-8})^{3}$;
11) $(a^{4}b^{-2}c^{3})^{-10}$;
12) $\left(\dfrac{a^{10}b^{-7}}{c^{6}d^{-14}}\right)^{-2}$.

275. Представьте выражение в виде степени с основанием a или произведения степеней с разными основаниями:

1) $a^{6} \cdot a^{-10}$;
2) $a^{4} : a^{7}$;
3) $a^{-5} : a^{-9}$;
4) $(a^{-2})^{6}$;
5) $(a^{-3}b^{-1}c^{7})^{-4}$;
6) $\left(\dfrac{a^{2}}{bc^{-1}}\right)^{-3}$;
7) $a^{-16} \cdot a^{8} : a^{-4}$;
8) $(a^{-3})^{8} : (a^{-1})^{7} \cdot (a^{-7})^{-4}$.

276. Найдите значение выражения:

1) $9^{5} \cdot 9^{-7}$;
2) $10^{-8} \cdot 10^{12}$;
3) $3^{-18} : 3^{-21}$;
4) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$;
5) $(17^{4})^{-12} \cdot (17^{-6})^{-8}$;
6) $\dfrac{6^{-5} \cdot (6^{-3})^{4}}{(6^{-7})^{2} \cdot 6^{-3}}$;
7) $3^{-3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$;
8) $\dfrac{14^{-5}}{7^{-5}}$.

277. Найдите значение выражения:

1) $6^{-9} \cdot 6^{6}$;
2) $7^{-16} : 7^{-18}$;
3) $5^{-7} : 5^{-6} \cdot 5^{3}$;
4) $\dfrac{4^{-7} \cdot (4^{-5})^{3}}{(4^{-3})^{7}}$;
5) $0{,}8^{-4} \cdot \left(1\dfrac{1}{4}\right)^{-4}$;
6) $\dfrac{11^{-2}}{22^{-2}}$.

278. Упростите выражение:

1) $3a^{-3} \cdot 4a^{-4}$;
2) $\dfrac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$;
3) $(2c^{-6})^{4}$;
4) $m^{-2}n \cdot mn^{-2}$;
5) $abc^{-1} \cdot ab^{-1}c$;
6) $\dfrac{kp^{-6}}{k^{4}p^{4}}$;
7) $(c^{-6}d^{2})^{-7}$;
8) $\dfrac{1}{3}a^{-3}b^{-6} \cdot \dfrac{6}{7}a^{7}b^{4}$;
9) $0{,}2c^{-3}d^{5} \cdot 1{,}5c^{-2}d^{-5}$;
10) $4x^{8} \cdot (-3x^{-2}y^{4})^{-2}$;
11) $\dfrac{13m^{-10}}{12n^{-8}} \cdot \dfrac{27n}{26m^{2}}$;
12) $\dfrac{18p^{-6}k^{2}}{7} : \dfrac{15k^{-2}}{p^{6}}$.

279. Упростите выражение:

1) $2a^{-5}b^2 \cdot 3a^{-2}b^{-5}$;

2) $\left(\frac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}$;

3) $\frac{3,6a^2b}{0,9a^3b^{-3}}$;

4) $0,8a^{-6}b^8 \cdot 5a^{10}b^{-8}$;

5) $\frac{25x^{-3}}{y^{-4}} \cdot \frac{y^4}{5x^{-7}}$;

6) $28c^3d^{-2} \cdot (2cd^{-1})^{-2}$.

280. Найдите значение выражения:

1) $8^{-3} \cdot 2^7$;

2) $27^{-2} : 9^{-4}$;

3) $100^{-2} : 1000^{-5} \cdot 0,01^6$;

4) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}$;

5) $25^{-4} : (0,2^{-3})^{-2}$;

6) $\frac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;

7) $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$;

8) $\frac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$.

281. Найдите значение выражения:

1) $9^{-4} \cdot 27^2$;

2) $32^{-5} : 64^{-4}$;

3) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$;

4) $8^{-2} : 0,5^4$;

5) $\frac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$;

6) $\frac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$.

282. Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

1) $-2,4a^{-4}b^3 \cdot (-2a^{-3}c^{-5})^{-3}$;

2) $(-10x^{-2}yz^{-8})^{-2} \cdot (0,1yz^{-4})^{-2}$;

3) $1\frac{7}{9}m^{-6}n \cdot \left(1\frac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}$;

4) $\left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2b^9)^{-2}$;

5) $\left(\frac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2} \cdot 49m^{-6}n^4$;

6) $\left(\frac{4x^{-5}}{3y^{-2}}\right)^{-3} \cdot (16x^{-6}y^4)^2$.

283. Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

1) $3,6a^{-8}b^4 \cdot (-3a^{-3}b^{-7})^{-2}$;

2) $1\frac{9}{16}x^{-6}y^2 \cdot \left(1\frac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}$;

3) $\left(\frac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3} \cdot 125m^{-10}n^2$;

4) $\left(\frac{7a^{-6}}{b^5}\right)^{-2} \cdot (a^{-4}b)^4$.

284. Вынесите за скобки степень с основанием a и наименьшим из данных показателей:

1) $a^3 - 2a^4$; 2) $a^{-3} - 2a^{-4}$; 3) $a^3 - 2a^{-4}$.

285. Вынесите за скобки степень с основанием b и наименьшим из данных показателей:
1) $b^3 + 3b^2$; 2) $b^{-3} + 3b^{-2}$; 3) $b^{-3} + 3b^2$.

286. Представьте в виде произведения выражение:
1) $a^{-2} - 4$; 4) $a^{-3} + b^{-3}$;
2) $a^{-4}b^{-6} - 1$; 5) $m^{-4} - 6m^{-2}p^{-1} + 9p^{-2}$;
3) $25x^{-8}y^{-12} - z^{-2}$; 6) $a^{-8} - 49a^{-2}$.

287. Представьте в виде произведения выражение:
1) $x^{-4} - 25$; 3) $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$;
2) $m^{-6} - 8n^{-3}$; 4) $a^{-4} - a^{-2}$.

288. Докажите тождество:
$a^{-8} - b^{-8} = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})(a^{-4} + b^{-4})$.

289. Упростите выражение:
1) $(a^{-4} + 3)(a^{-4} - 3) - (a^{-4} + 2)^2$; 3) $\dfrac{2x^{-2} + y^{-2}}{3x^{-2} - 3x^{-1}y^{-1}} - \dfrac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$;
2) $\dfrac{m^{-2} - n^{-2}}{m^{-1} + n^{-1}}$; 4) $\dfrac{a^{-5} + b^{-5}}{a^{-6}} : \dfrac{a^{-3}b^{-5} + a^{-8}}{a^{-4}}$.

290. Упростите выражение:
1) $(x^{-2} - 1)^2 - (x^{-2} - 4)(x^{-2} + 4)$; 3) $\dfrac{5m^{-2} + n^{-2}}{4m^{-3} + 4m^{-1}n^{-2}} - \dfrac{m^{-1}}{m^{-2} + n^{-2}}$;
2) $\dfrac{a^{-2} - 10a^{-1}b^{-1} + 25b^{-2}}{a^{-1} - 5b^{-1}}$; 4) $\dfrac{b^{-1} + 3c^{-1}}{c^{-2}} \cdot \dfrac{bc}{b^{-2}c^{-1} + 3b^{-1}c^{-2}}$.

291. Порядок числа a равен -4. Определите порядок числа:
1) $10a$; 2) $0{,}1a$; 3) $100a$; 4) $0{,}001a$; 5) $10\,000a$; 6) $1\,000\,000a$.

292. Порядок числа b равен 3. Определите порядок числа:
1) $10b$; 2) $0{,}01b$; 3) $0{,}0001b$; 4) $1000b$.

293. Выполните вычисления и результат запишите в стандартном виде:
1) $(1{,}8 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^3)$; 3) $\dfrac{5{,}4 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^8}$;
2) $(3 \cdot 10^6) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-9})$; 4) $\dfrac{1{,}7 \cdot 10^{-6}}{3{,}4 \cdot 10^{-4}}$.

294. Выполните вычисления и результат запишите в стандартном виде:
1) $(1{,}6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^7)$; 3) $\dfrac{7 \cdot 10^{-4}}{1{,}4 \cdot 10^{-6}}$;
2) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (1{,}8 \cdot 10^{-1})$; 4) $\dfrac{6{,}4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-2}}$.

295. Расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5 \cdot 10^8$ км, а скорость света — $3 \cdot 10^8$ м/с. За сколько минут свет от Солнца дойдёт до Земли? Ответ округлите до единиц.

296. Плотность меди равна $8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найдите массу медной плитки, длина которой $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ м, ширина — 12 см, а высота — 0,02 м.

297. Масса Земли равна $6 \cdot 10^{24}$ кг, а Луны — $7{,}4 \cdot 10^{22}$ кг. Во сколько раз масса Луны меньше массы Земли? Ответ округлите до единиц.

298. Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

1) $\left(\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}} - \dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}}\right) : \left(\dfrac{b}{a^2}\right)^{-1}$;

2) $\dfrac{b^{-2}-2}{b^{-2}} - \dfrac{b^{-4}-4}{b^{-2}} \cdot \dfrac{1}{b^{-2}-2}$;

3) $\dfrac{5c^{-3}}{c^{-3}-3} - \dfrac{c^{-3}+6}{2c^{-3}-6} \cdot \dfrac{90}{c^{-6}+6c^{-3}}$;

4) $\left(\dfrac{m^{-4}}{m^{-4}-4} - \dfrac{3m^{-4}}{m^{-8}-8m^{-4}+16}\right) \cdot \dfrac{16-m^{-8}}{m^{-4}-7} + \dfrac{8m^{-4}}{m^{-4}-4}$.

299. Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

1) $\dfrac{a^{-2}+5}{a^{-4}-6a^{-2}+9} : \dfrac{a^{-4}-25}{4a^{-2}-12} - \dfrac{2}{a^{-2}-5}$;

2) $\left(b^{-1} - \dfrac{5b^{-1}-36}{b^{-1}-7}\right) \cdot \left(2b^{-1} + \dfrac{2b^{-1}}{b^{-1}-7}\right)^{-1}$.

300. Порядок числа a равен -4, а порядок числа b равен 3. Каким может быть порядок значения выражения:
1) ab; 2) $a + b$; 3) $a + 10b$; 4) $10a + 0{,}1b$?

301. Порядок числа m равен 2, а порядок числа n равен 4. Каким может быть порядок значения выражения:
1) mn; 2) $0{,}01mn$; 3) $100m + n$; 4) $0{,}01m + n$?

Упражнения для повторения

302. Среднее арифметическое двух натуральных чисел равно 18. При делении большего из этих чисел на меньшее получим неполное частное 3 и остаток 4. Найдите эти числа.

303. Благодаря мероприятиям по экономии электроэнергии за первый месяц её расход был уменьшен на 20 %, за второй — на 10 % по сравнению с предыдущим, а за третий — на 5 % по сравнению с предыдущим. На сколько процентов в итоге был уменьшен расход электроэнергии?

304. Для откачивания воды из затопленного помещения были задействованы три насоса. Первый из них может выкачать всю воду за 12 ч, второй — за 15 ч, а третий — за 20 ч. Сначала в течение 3 ч работали первый и второй насосы, а затем подключили третий насос. За какое время была откачана вся вода?

305. Тетрадь стоит 19 р. У покупателя имеются монеты только по 5 р., а у продавца — только по 2 р. Может ли покупатель рассчитаться за тетрадь без дополнительного размена денег? В случае утвердительного ответа определите, какое наименьшее количество монет соответствующего достоинства должны иметь покупатель и продавец.

Готовимся к изучению новой темы

306. Найдите значение функции $y = -\frac{14}{x}$, если:

1) $x = 2$; 2) $x = -1$; 3) $x = 3{,}5$; 4) $x = -6$.

307. Функция задана формулой $y = \frac{x + 2}{x - 6}$. Какова область определения данной функции? Заполните таблицу, вычислив соответствующие значения функции.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y							

308. Постройте график функции $y = 2x - 1$. Проходит ли этот график через точку: 1) A (30; 59); 2) B (–15; –29)?

309. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = 2{,}7x - 8$ и $y = 1{,}2x + 7$.

310. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = 7. \end{cases}$$

Повторите содержание п. 17—19 на с. 232—233.

Учимся делать нестандартные шаги

311. По окончании теннисного турнира, который проводился по олимпийской системе (проигравший выбывает), оказалось, что только 32 участника выиграли больше встреч, чем проиграли. Сколько теннисистов принимало участие в турнире?

§ 10. Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график

В 6 классе вы познакомились с функциональной зависимостью, которая характеризуется тем, что с **увеличением (уменьшением)** одной величины в несколько раз другая величина **уменьшается (увеличивается)** во столько же раз. Такую зависимость называют **обратной пропорциональностью**.

Рассмотрим два примера.

- Пусть имеется 500 р. Обозначим через x р. цену 1 кг товара, а через y кг — количество этого товара, которое можно приобрести за 500 р.

Зависимость переменной y от переменной x является обратной пропорциональностью: увеличение цены x в несколько раз приводит к уменьшению количества товара y во столько же раз, и наоборот, уменьшение цены приводит к увеличению количества купленного товара.

Этой функциональной зависимости соответствует функция, заданная формулой $y = \frac{500}{x}$.

- Рассмотрим прямоугольник, площадь которого равна 18 см^2, а стороны — x см и y см. Тогда

$$y = \frac{18}{x}.$$

Увеличение (уменьшение) знаменателя x в несколько раз приводит к уменьшению (увеличению) величины y во столько же раз, то есть зависимость переменной y от переменной x является обратной пропорциональностью.

В рассмотренных примерах математической моделью реальных ситуаций является функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$.

Определение

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют обратной пропорциональностью.

Поскольку в выражении $\frac{k}{x}$ допустимыми значениями переменной x являются все числа, кроме 0, то областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ также являются все числа, кроме 0.

Рассмотрим функцию $y = \frac{6}{x}$. В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции.

x	–6	–4	–3	–2	–1,5	–1
y	–1	–1,5	–2	–3	–4	–6

x	1	1,5	2	3	4	6
y	6	4	3	2	1,5	1

Отметим на координатной плоскости точки, координаты $(x;\ y)$ которых приведены в таблице (рис. 3).

Чем больше точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \frac{6}{x}$, нам удастся отметить, тем меньше полученная фигура (рис. 4) будет отличаться от графика функции $y = \frac{6}{x}$.

Рис. 3

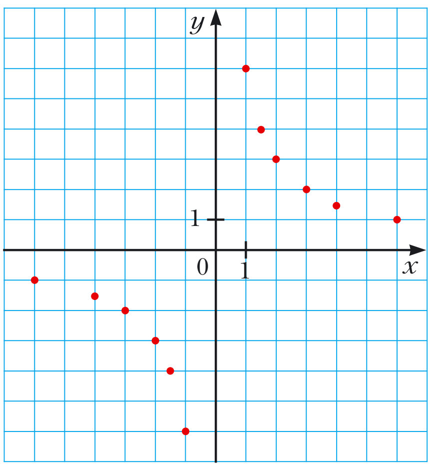
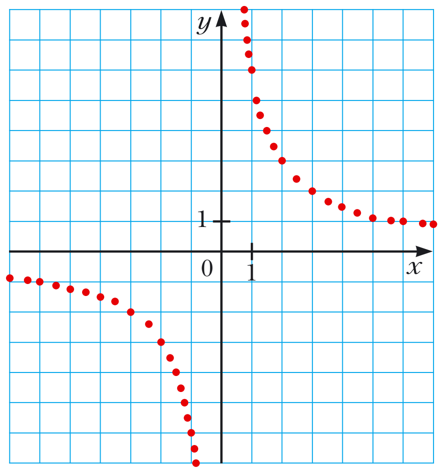


Рис. 4



Среди отмеченных точек не может быть точек, абсциссы которых равны нулю, поскольку число 0 не принадлежит области определения данной функции. Поэтому график функции $y = \frac{6}{x}$ не имеет общих точек с осью ординат.

Кроме того, этот график не имеет общих точек и с осью абсцисс, то есть точек, ординаты которых равны нулю. Действительно, уравнение $\frac{6}{x} = 0$ не имеет решений. Следовательно, число 0 не принадлежит области значений данной функции.

Если $x > 0$, то $\frac{6}{x} > 0$, то есть $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$. Следовательно, точки графика данной функции могут находиться только в I и III координатных четвертях.

Заметим, что с увеличением модуля абсциссы расстояния от точек графика функции $y = \frac{6}{x}$ до оси абсцисс уменьшаются и могут стать сколь угодно малыми, но никогда не будут равными нулю. Действительно, чем больше модуль аргумента, тем меньше модуль соответствующего значения функции.

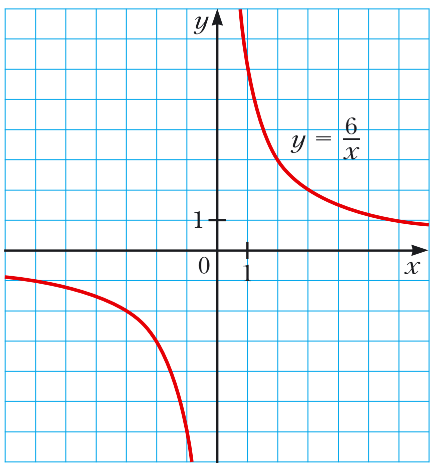
Аналогично можно установить, что с уменьшением модуля абсциссы расстояния от точек графика до оси ординат уменьшаются и могут стать сколь угодно малыми, но никогда не будут равными нулю.

Если бы удалось отметить на координатной плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \frac{6}{x}$, то мы получили бы фигуру, изображённую на рисунке 5.

Фигуру, являющуюся графиком функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют **гиперболой**. На рисунке 5 изображена гипербола $y = \frac{6}{x}$. Гипербола состоит из двух частей — **ветвей гиперболы**.

Заметим, что если верно равенство $y_0 = \frac{k}{x_0}$, то верно равенство $-y_0 = -\frac{k}{x_0}$. Следовательно, если точка A $(x_0; y_0)$ принадлежит гиперболе $y = \frac{k}{x}$, то точка B $(-x_0; -y_0)$, симметричная точке A относительно начала координат, также принадлежит этой гиперболе. Значит, гипербола $y = \frac{k}{x}$ является симметричной фигурой с центром симметрии в точке O (0; 0).

Рис. 5



Функцию, обладающую такими свойствами, называют **нечётной**. Эта функция при противоположных значениях аргумента принимает противоположные значения. К нечётным функциям также относится, например, прямая пропорциональность $y = kx$. Подробнее о нечётных функциях вы узнаете в 10 классе.

Если $k > 0$, то ветви гиперболы $y = \frac{k}{x}$ расположены в I и III четвертях, а если $k < 0$ — то во II и IV четвертях.

На рисунке 6 изображён график функции $y = -\frac{6}{x}$. Ветви гиперболы $y = -\frac{6}{x}$ расположены во II и IV четвертях.

Рис. 6

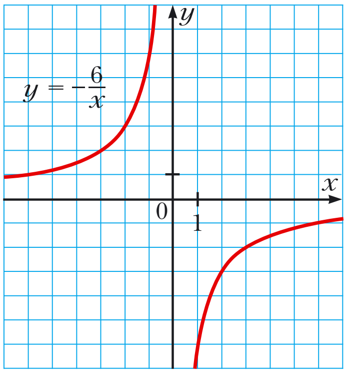
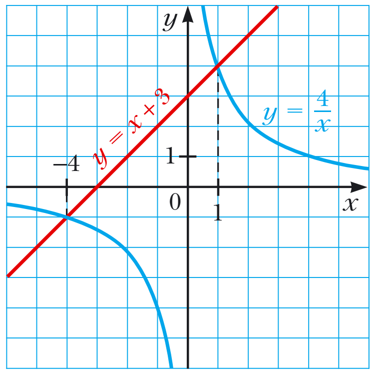


Рис. 7



Заметим, что областью значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, являются все числа, кроме 0.

В таблице приведены свойства функции $y = \frac{k}{x}$, изученные в этом параграфе.

Область определения	Все числа, кроме 0
Область значений	Все числа, кроме 0
График	Гипербола
Нуль функции (значение аргумента, при котором значение функции равно 0)	Не существует
Значения функции при противоположных значениях аргумента	Значения функции при противоположных значениях аргумента являются противоположными числами (функция нечётная)
Свойство графика	Начало координат является центром симметрии гиперболы

Покажем, как график функции $y = \frac{k}{x}$ можно использовать при решении уравнений.

Пример. Решите уравнение $\frac{4}{x} = x + 3$.

Решение. Рассмотрим функции $y = \frac{4}{x}$ и $y = x + 3$. Построим в одной системе координат графики этих функций (рис. 7). Они пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны 1 и –4. В каждой из точек пересечения графиков функций значение функции $y = \frac{4}{x}$ равно значению функции $y = x + 3$. Следовательно, при найденных абсциссах значения выражений $\frac{4}{x}$ и $x + 3$ равны, то есть числа 1 и –4 являются корнями уравнения $\frac{4}{x} = x + 3$. Проверка это подтверждает. Действительно, $\frac{4}{1} = 1 + 3$ и $\frac{4}{-4} = -4 + 3$. ◄

Описанный метод решения уравнений называют **графическим**. В 7 классе вы ознакомились с графическим методом решения систем уравнений и знаете, что этот метод не всегда даёт точный результат. Поэтому проверка найденных корней является обязательным этапом решения уравнения.

В дальнейшем (§ 21) вы научитесь решать такие уравнения, не используя графический метод.

1. Какую функцию называют обратной пропорциональностью?
2. Что является областью определения функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$?
3. Как называют фигуру, которая является графиком обратной пропорциональности?
4. Как называют функцию, которая при противоположных значениях аргумента принимает противоположные значения?
5. Что является областью значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$?
6. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$, если $k > 0$; если $k < 0$?
7. Объясните, в чём заключается графический метод решения уравнений.

Упражнения

312. Автомобиль проезжает некоторое расстояние за 10 ч. За какое время он проедет это же расстояние, если его скорость:
1) увеличится в 2 раза;
2) уменьшится в 1,2 раза?

313. Длина прямоугольника равна 30 см. Какой станет его длина, если при той же самой площади ширину прямоугольника:

1) увеличить в 1,5 раза; 2) уменьшить в 3,2 раза?

314. За некоторую сумму денег купили 40 м ткани. Сколько метров ткани купили бы за ту же сумму, если бы цена за 1 м:

1) уменьшилась в 2,6 раза; 2) увеличилась в 1,6 раза?

315. Пешеход прошёл 12 км. Заполните таблицу, в первой строке которой указана скорость, а во второй — время движения.

v, км/ч	5		2,4	
t, ч		3		$3\frac{1}{3}$

Задайте формулой зависимость t от v.

316. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 48 см^3. Заполните таблицу, в первой строке которой указана площадь его основания, а во второй — высота.

S, см^2	16		240	
h, см		8		4,8

Задайте формулой зависимость h от S.

317. Бригада из семи рабочих с одинаковой производительностью труда может выполнить некоторое производственное задание за 12 дней. Сколько потребуется рабочих с такой же производительностью труда, чтобы выполнить это задание за 4 дня?

318. Заготовленных кормов хватит для 24 лошадей на 18 дней. На сколько дней хватит этих кормов для 36 лошадей?

319. Среди данных функций укажите обратные пропорциональности:

1) $y = 2x$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 5) $y = -\frac{0{,}8}{x}$; 7) $y = \frac{1}{2x}$;

2) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{2x}{3}$; 8) $y = \frac{2}{3x}$.

320. Задана функция $y = \frac{24}{x}$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: –3; 6; 0,2;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 12; –6; 100.

321. Задана функция $y = -\frac{36}{x}$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: –4; 0,9; 18;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 6; –0,3; 8.

322. Постройте график функции $y = -\frac{8}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 4; –1;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 2; –8;
3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

323. Постройте график функции $y = \frac{10}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 2; –10;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 5; –2;
3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

324. Не выполняя построения графика функции $y = \frac{28}{x}$, определите, проходит ли график через точку:

1) A (–4; –7); 2) B (14; –2); 3) C (0,5; 14); 4) D (0,2; 140).

325. Истинным или ложным является высказывание: график функции $y = -\frac{48}{x}$ проходит через точку:

1) A (–6; –8);
2) B (12; –4);
3) C (0,3; –16);
4) D (0,4; –120)?

326. На рисунке 8 изображён график зависимости времени t движения из пункта A в пункт B от скорости v движения. Пользуясь графиком, определите:

1) за какое время можно добраться из пункта A в пункт B, если двигаться со скоростью 8 км/ч; 24 км/ч;
2) с какой скоростью нужно двигаться, чтобы добраться из пункта A в пункт B за 3 ч; за 4 ч;
3) чему равно расстояние между пунктами A и B.

Рис. 8

327. Проволочный реостат (рис. 9) подключён к блоку питания. Сопротивление реостата R зависит от положения ползунка и может изменяться в пределах от 0 до 6 Ом. Пользуясь графиком зависимости силы тока I от сопротивления R (рис. 10), при условии, что напряжение на концах реостата остаётся неизменным, определите:
1) чему равна сила тока, если сопротивление равно 2 Ом;
2) при каком значении сопротивления сила тока равна 3 А;
3) сколько вольт составляет напряжение на концах реостата.

Рис. 9

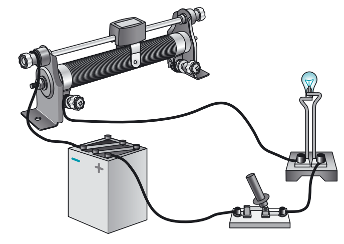
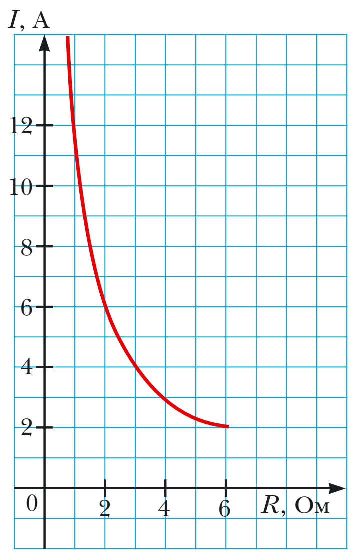


Рис. 10



328. Найдите значение k, при котором график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку:
1) $A\ (-5;\ 4)$; 3) $C\ (1{,}5;\ -8)$.
2) $B\left(\frac{1}{6};\ -2;\right)$

329. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A\ (10;\ 1{,}6)$. Проходит ли график этой функции через точку:
1) $B\ (-1;\ -16)$; 2) $C\ (-2;\ 8)$?

330. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{4}{x}$ и $y = x$ и определите координаты точек их пересечения.

331. Решите графически уравнение:
1) $\frac{4}{x} = 4 - x$; 2) $x - 2 = \frac{3}{x}$; 3) $x + 2 = -\frac{5}{x}$.

332. Решите графически уравнение:
1) $\frac{8}{x} = 6 - x$; 2) $2x = \frac{2}{x}$; 3) $\frac{7}{x} = -x$.

333. Решите графически систему уравнений:
1) $\begin{cases} xy = 4, \\ 4y = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$

334. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} xy = 5, \\ y - x = 4. \end{cases}$

335. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy = -1, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -1, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$

336. Определите графически количество решений системы уравнений $\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$

337. Найдите координаты всех точек графика функции $y = \frac{64}{x}$, у которых абсцисса и ордината равны.

338. Найдите координаты всех точек графика функции $y = -\frac{25}{x}$, у которых абсцисса и ордината — противоположные числа.

339. Постройте график функции $y = \frac{6}{|x|}$.

340. Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x + 3, & \text{если } x > -1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} -2x + 10, & \text{если } x \leqslant 2, \\ \frac{12}{x}, & \text{если } 2 < x < 4, \\ 3, & \text{если } x \geqslant 4. \end{cases}$

341. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, & \text{если } x < -2, \\ 2, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \frac{4}{x}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

342. Постройте график функции:

1) $y = \frac{9x - 18}{x^2 - 2x}$; 2) $y = \frac{5x^2 - 5}{x - x^3}$.

343. Постройте график функции $y = \frac{10x^2 - 40}{x^3 - 4x}$.

Упражнения для повторения

344. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных, содержащихся в выражении, его значение не зависит от значений a и b:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + 3b} \cdot \left(\frac{a + b}{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{b}{a^2 - b^2}\right) - \frac{b}{a - b}.$$

345. Решите уравнение:

$$\frac{3}{5x+25}+\frac{1}{2x-10}=\frac{5}{x^2-25}.$$

346. Цену шкафа снизили на 30 %, а спустя некоторое время повысили на 30 %. Как изменилась, увеличилась или уменьшилась, цена шкафа по сравнению с первоначальной и на сколько процентов?

347. (*Задача Сунь-Цзы*[1].) Двое мужчин получили монеты, которые они должны были разделить между собой так, что если бы к монетам, которые получил первый из них, прибавить половину монет второго, или к монетам, которые получил второй, прибавить $\frac{2}{3}$ монет первого, то в обоих случаях было бы 48 монет. Сколько монет получил каждый из мужчин?

348. Если лыжник будет двигаться со скоростью 10 км/ч, то доберётся в пункт назначения на 1 ч позже запланированного времени прибытия, а если будет двигаться со скоростью 15 км/ч — то на 1 ч раньше. С какой скоростью он должен двигаться, чтобы прибыть в пункт назначения в запланированное время?

Учимся делать нестандартные шаги

349. Каждый из трёх учеников написал 100 разных слов. После этого слова, которые встретились не менее двух раз, вычеркнули. В результате у одного ученика осталось 45 слов, у второго — 68, а у третьего — 78. Докажите, что по крайней мере одно слово записали все трое.

[1] Сунь-Цзы — китайский математик, который жил в III или IV в.

Задание № 3 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Решите уравнение $\frac{x^2-100}{x-10}=0$.

А) –10; 10   Б) 10   В) –10   Г) корней нет

2. Решите уравнение $\frac{x-10}{x^2-100}=0$.

А) –10; 10   Б) 10   В) –10   Г) корней нет

3. Какое из данных равенств верно?

А) $10^{-3}=-1000$ В) $(-2)^{-3}=-\frac{1}{8}$

Б) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2}=-\frac{9}{16}$ Г) $\frac{1}{7^{-2}}=-49$

4. Как записывают в стандартном виде число 42 000?

А) $4{,}2\cdot10^3$ Б) $4{,}2\cdot10^4$ В) $0{,}42\cdot10^5$ Г) $42\cdot10^3$

5. Как записывают в виде десятичной дроби число $6{,}3\cdot10^{-3}$?

А) 0,63   Б) 0,063   В) 0,0063   Г) 0,00063

6. Представьте число $\frac{1}{25}$ в виде степени с основанием 5.

А) 5^{-2} Б) 5^2 В) 5^{-3} Г) 5^3

7. Чему равно значение выражения $(1{,}7\cdot10^8)\cdot(6\cdot10^{-3})$?

А) $1{,}02\cdot10^5$ Б) $1{,}02\cdot10^6$ В) $10{,}2\cdot10^6$ Г) $1{,}02\cdot10^7$

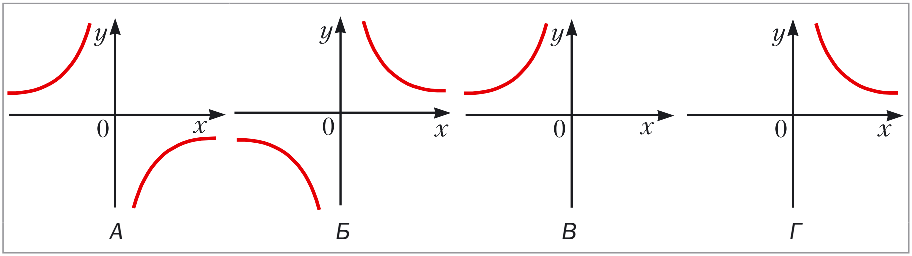
8. Найдите значение выражения $\frac{9^{-2}\cdot3^{-5}}{81\cdot27^{-3}}$.

А) 81   Б) $\frac{1}{81}$ В) 27   Г) $\frac{1}{27}$

9. Какая из данных функций не является обратной пропорциональностью?

А) $y=\frac{3}{x}$ Б) $y=-\frac{3}{x}$ В) $y=\frac{3}{2x}$ Г) $y=\frac{3x}{2}$

10. На одном из рисунков изображён график функции $y=-\frac{4}{x}$. Укажите этот рисунок.



11. При каком значении k график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку A $(-3; 0{,}6)$?

А) $-1{,}8$ Б) $-0{,}2$ В) $-2{,}4$ Г) $-3{,}6$

12. Решите уравнение $\frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x+1}{4-x} = \frac{4x^2+8}{x^2-16}$.

А) 0; 4 Б) – 4; 0 В) –4 Г) 0

Итоги главы 1

Рациональное выражение

Целые и дробные выражения называют рациональными выражениями.

Допустимые значения переменных

Допустимыми значениями переменных, входящих в рациональное выражение, называют все значения переменных, при которых это выражение имеет смысл.

Тождественно равные выражения

Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.

Тождество

Равенство, которое выполняется при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.

Основное свойство рациональной дроби

Если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной.

Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.

Чтобы вычесть рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тот же.

Умножение рациональных дробей

Произведением двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.

Деление рациональных дробей

Частным двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителя делимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.

Возведение рациональной дроби в степень

Чтобы возвести рациональную дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби.

Равносильные уравнения

Два уравнения называют равносильными, если они имеют одни и те же корни или каждое из уравнений не имеет корней.

Свойства уравнений

Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Рациональное уравнение

Уравнение, левая и правая части которого являются рациональными выражениями, называют рациональным.

Степень с целым отрицательным показателем

Для любого числа a, не равного нулю, и натурального числа n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Степень с показателем, равным нулю

Для любого числа a, не равного нулю, $a^0 = 1$.

Стандартный вид числа

Запись числа в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число, называют стандартным видом числа.

Свойства степени с целым показателем

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любых целых m и n выполняются равенства:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (основное свойство степени);

$(a^m)^n = a^{mn}$;

$(ab)^n = a^n b^n$;

$a^m : a^n = a^{m-n}$;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Функция обратная пропорциональность

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют обратной пропорциональностью.

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$

Область определения: все числа, кроме 0.

Область значений: все числа, кроме 0.

График: гипербола.

Нуль функции: не существует.

Свойство графика: начало координат является центром симметрии гиперболы.

Глава 2. Квадратные корни. Действительные числа

Изучая материал этой главы, вы познакомитесь с функцией $y = x^2$ и её свойствами.

Узнаете о новом действии «извлечение квадратного корня». Вы убедитесь, что для изучения окружающего мира рациональных чисел недостаточно.

Вы ознакомитесь с новым математическим понятием — арифметический квадратный корень, изучите его свойства. Научитесь упрощать выражения, содержащие квадратные корни.

§ 11. Функция $y = x^2$ и её график

Обозначим через y площадь квадрата со стороной x. Тогда $y = x^2$.

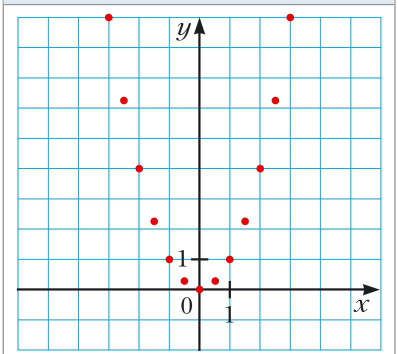
С изменением стороны x квадрата будет изменяться и его площадь y.

Понятно, что каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y. Следовательно, зависимость переменной y от переменной x является функциональной, а формула $y = x^2$ задаёт функцию.

Рассмотрим функцию $y = x^2$, областью определения которой являются все числа. В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Рис. 11



Отметим на координатной плоскости точки, координаты $(x; y)$ которых приведены в таблице (рис. 11).

Чем больше точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = x^2$, будет отмечено, тем меньше полученная фигура (рис. 12) будет отличаться от графика функции $y = x^2$.

Пара чисел (0; 0) является решением уравнения $y = x^2$. Следовательно, график данной функции проходит через начало координат. Поскольку $y = x^2$ и $x^2 \geqslant 0$, то

$y \geqslant 0$, то есть среди отмеченных точек не может быть точек с отрицательными ординатами.

Область значений функции $y = x^2$ — все неотрицательные числа.

Если бы удалось отметить на координатной плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = x^2$, то получилась бы фигура — график функции $y = x^2$, которую называют **параболой** (рис. 13).

Рис. 12

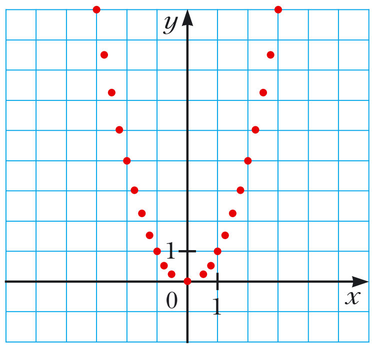
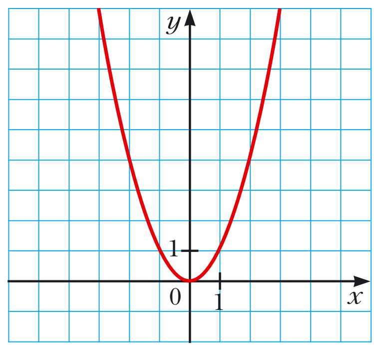


Рис. 13



Точка с координатами (0; 0) делит параболу на две равные части, каждую из которых называют **ветвью параболы**, а саму точку — **вершиной параболы**.

Заметим, что если верно равенство $y_0 = x_0^2$, то верно и равенство $y_0 = (-x_0)^2$. Следовательно, если точка A $(x_0; y_0)$ принадлежит параболе $y = x^2$, то точка B $(-x_0; y_0)$, симметричная точке A относительно оси ординат, также принадлежит этой параболе. Значит, ось ординат является осью симметрии параболы $y = x^2$.

Функцию, обладающую такими свойствами, называют **чётной**. Эта функция при противоположных значениях аргумента принимает равные значения. К чётным функциям также относится, например, функция $y = |x|$. Подробнее о чётных функциях вы узнаете в 10 классе.

В таблице приведены свойства функции $y = x^2$, рассмотренные в этом параграфе.

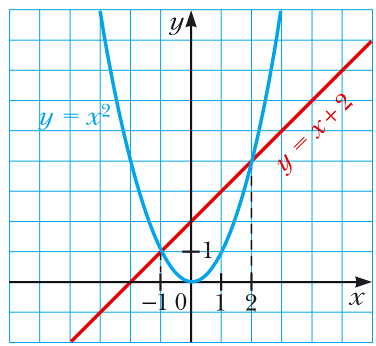
Область определения	Все числа
Область значений	Все неотрицательные числа
График	Парабола

Нуль функции (значение аргумента, при котором значение функции равно 0)	$x = 0$
Значения функции при противоположных значениях аргумента	Значения функции при противоположных значениях аргумента равны (функция чётная)
Свойство графика	Ось ординат является осью симметрии параболы

Пример. Решите графически уравнение $x^2 = x + 2$.

Решение. В одной системе координат построим графики функций $y = x^2$ и $y = x + 2$ (рис. 14). Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны 2 и −1. Следовательно, как при $x = 2$, так и при $x = -1$ значения выражений x^2 и $x + 2$ равны, то есть числа 2 и −1 являются корнями уравнения $x^2 = x + 2$. Проверка это подтверждает. Действительно, $2^2 = 2 + 2$ и $(-1)^2 = -1 + 2$. ◄

Рис. 14



1. Что является областью определения функции $y = x^2$?
2. Что является областью значений функции $y = x^2$?
3. При каком значении аргумента значение функции $y = x^2$ равно нулю?
4. Какая фигура является графиком функции $y = x^2$?
5. Как называют функцию, которая при противоположных значениях аргумента принимает равные значения?
6. Какая прямая является осью симметрии параболы $y = x^2$?

Упражнения

350. Функция задана формулой $y = x^2$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: −6; 0,8; −1,2; 150;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 49; 0; 2500; 0,04.

351. Не выполняя построения графика функции $y = x^2$, определите, проходит ли этот график через точку:

1) A (−8; 64); 3) C (0,5; 2,5);

2) B (−9; −81); 4) D (0,1; 0,01).

352. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = 4x - 4$. Постройте графики данных функций и отметьте найденные точки.

353. Решите графически уравнение:

1) $x^2 = x - 1$; 2) $x^2 - 2x - 3 = 0$; 3) $x^2 = \frac{8}{x}$.

354. Решите графически уравнение:

1) $x^2 = -4x - 3$; 2) $x^2 - 3x + 5 = 0$; 3) $x^2 + \frac{1}{x} = 0$.

355. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y + 6 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10. \end{cases}$

356. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2, \\ x - 3y = -3. \end{cases}$

357. Функция f задана следующим способом: $f(x) = \begin{cases} 4, \text{ если } x \leqslant -2, \\ x^2, \text{ если } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

1) Найдите $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(0{,}5)$.
2) Постройте график данной функции.

358. Дана функция $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ если } x \leqslant -1, \\ x^2, \text{ если } -1 < x < 2, \\ 4, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$

1) Найдите $f(-4)$, $f(-0{,}3)$, $f(1{,}9)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(2)$.
2) Постройте график данной функции.

359. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x + 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

1) Найдите $f(-7)$, $f(0)$, $f(2)$.
2) Постройте график данной функции.

360. Дана функция $f(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x}, \text{ если } x \leqslant -1, \\ x^2, \text{ если } x > -1. \end{cases}$

1) Найдите $f(-12)$, $f(-1)$, $f(-0{,}9)$, $f(3)$, $f(0)$.
2) Постройте график данной функции.

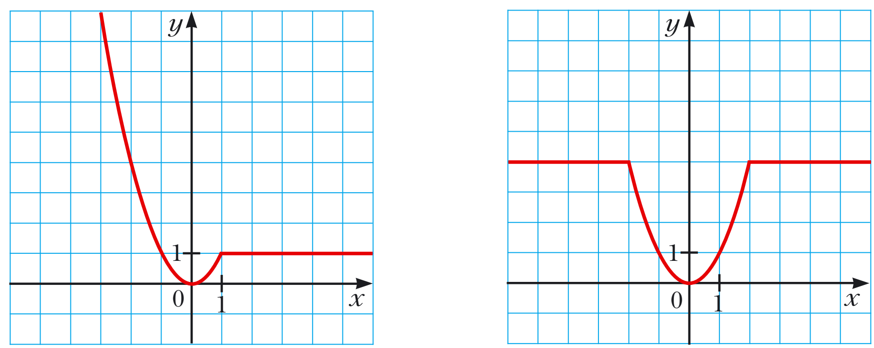
361. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x + 1}$; 2) $y = \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}$.

362. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3}{x}$.

363. Найдите область определения, область значений и нули функции $y = -x^2$. Постройте график этой функции.

Рис. 15



а *б*

364. Постройте график уравнения:

1) $\dfrac{y - x^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$;

2) $\dfrac{y - x^2}{y - x} = 0$.

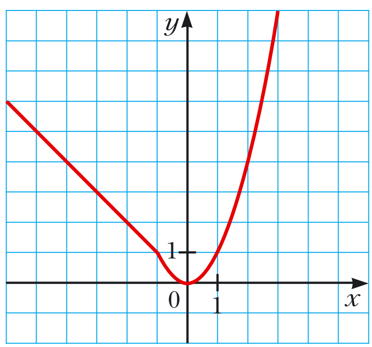
365. Постройте график уравнения:

$$\frac{x^2 - y}{(x+2)^2 + (y-4)^2} = 0.$$

366. Задайте с помощью формул функцию, график которой изображён на рисунке 15.

367. Задайте с помощью формул функцию, график которой изображён на рисунке 16.

Рис. 16



Упражнения для повторения

368. Докажите тождество:

$$\frac{(a+b)^2}{a-b} : \left(\frac{a}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{a+b}\right) = a + b.$$

369. Решите уравнение:

$$\frac{6}{x-2} - \frac{x+3}{x} = \frac{x+6}{x^2-2x}.$$

370. Докажите, что значение выражения $27^6 - 9^7$ кратно 48.

371. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км, одновременно навстречу друг другу вышли два туриста и встретились через 3 ч 45 мин. Если бы первый из них вышел на 2 ч раньше второго, то они встретились бы через 4,5 ч после выхода первого. Найдите скорость каждого туриста.

Готовимся к изучению новой темы

372. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна: 1) 25 см^2; 2) 1600 дм^2; 3) 0,04 м^2.

373. Решите уравнение:

1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = \frac{36}{49}$.

374. При каких значениях a уравнение $x^2 = a$ не имеет корней?

375. Постройте графики функций $y = x^2$ и $y = 1$ и найдите координаты их общих точек.

Учимся делать нестандартные шаги

376. Натуральные числа x, y, z таковы, что значения выражений $x + y$, $y + z$, $x + z$ — простые числа. Докажите, что среди чисел x, y, z есть по крайней мере два числа, равные 1.

§ 12. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

Рассмотрим квадрат, площадь которого равна 49 квадратным единицам. Пусть длина его стороны равна x единицам. Тогда уравнение $x^2 = 49$ можно рассматривать как математическую модель задачи о нахождении стороны квадрата, площадь которого равна 49 квадратным единицам.

Корнями этого уравнения являются числа 7 и –7. Говорят, что числа 7 и –7 являются **квадратными корнями** из числа 49.

Определение

Квадратным корнем из числа *a* называют число, квадрат которого равен *a*.

Приведём несколько примеров.

Квадратными корнями из числа 9 являются числа 3 и –3. Действительно, $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$.

Квадратными корнями из числа $\frac{25}{4}$ являются числа $\frac{5}{2}$ и $-\frac{5}{2}$. Действительно, $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Квадратным корнем из числа 0 является только число 0. Действительно, существует лишь одно число, квадрат которого равен нулю, — это число 0.

Поскольку не существует числа, квадрат которого равен отрицательному числу, то квадратного корня из отрицательного числа не существует.

Положительный корень уравнения $x^2 = 49$, число 7, является ответом в задаче о нахождении стороны квадрата, площадь которого равна 49 квадратным единицам. Это число называют **арифметическим квадратным корнем** из числа 49.

Определение

Арифметическим квадратным корнем из числа *a* называют неотрицательное число, квадрат которого равен *a*.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ называют **знаком квадратного корня** или **радикалом** (от лат. *radix* — «корень»).

Запись $\sqrt{a}$ читают: «квадратный корень из a», опуская при чтении слово «арифметический».

Выражение, стоящее под радикалом, называют **подкоренным выражением**. Например, в записи $\sqrt{b-5}$ двучлен $b - 5$ является подкоренным выражением. Из определения арифметического квадратного корня следует, что ***подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения***.

Действие нахождения арифметического квадратного корня из числа называют **извлечением квадратного корня**.

Рассмотрим несколько примеров:

$\sqrt{9} = 3$, так как $3 \geqslant 0$ и $3^2 = 9$;

$$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}, \text{ так как } \frac{5}{2} \geqslant 0 \text{ и } \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4};$$

$$\sqrt{0} = 0, \text{ так как } 0 \geqslant 0 \text{ и } 0^2 = 0.$$

Вообще, равенство $\sqrt{a} = b$ ***выполняется при условии, что*** $b \geqslant 0$ ***и*** $b^2 = a$.

Этот вывод можно представить в другой форме: ***для любого неотрицательного числа а справедливо, что*** $\sqrt{a} \geqslant 0$ ***и*** $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Например, $\sqrt{4} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$, $\sqrt{2} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, $\sqrt{5,2} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{5,2}\right)^2 = 5,2$.

Подчеркнём, что к понятию квадратного корня мы пришли, решая уравнение вида $x^2 = a$, где $a \geqslant 0$. Корни этого уравнения — числа, каждое из которых является квадратным корнем из числа a.

Поиск корней уравнения $x^2 = a$ проиллюстрируем, решив графически уравнение $x^2 = 4$.

В одной системе координат построим графики функций $y = x^2$ и $y = 4$ (рис. 17). Точки пересечения этих графиков имеют абсциссы 2 и –2, которые и являются корнями данного уравнения.

Уравнение $x^2 = a$ при $a < 0$ не имеет корней, что подтверждается графически: графики функций $y = x^2$ и $y = a$ при $a < 0$ общих точек не имеют (рис. 18).

Рис. 17

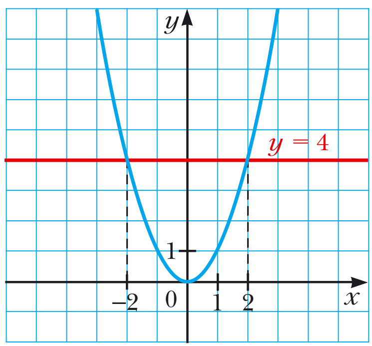
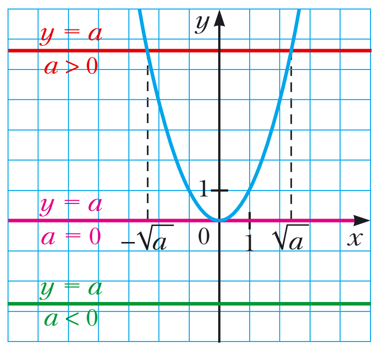


Рис. 18



При $a = 0$ уравнение $x^2 = a$ имеет единственный корень $x = 0$, что тоже подтверждается графически: графики функций $y = x^2$ и $y = 0$ имеют только одну общую точку (см. рис. 18).

Графический метод также позволяет сделать следующий вывод: если $a > 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет два корня. Действительно, парабола $y = x^2$

и прямая $y = a$, где $a > 0$, имеют две общие точки (см. рис. 18). При этом корнями уравнения $x^2 = a$ являются числа $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. Действительно, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Например, уравнение $x^2 = 5$ имеет два корня: $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$.

Пример 1. Найдите значение выражения $\left(-8\sqrt{2}\right)^2$.

Решение. Применив правило возведения произведения в степень и тождество $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, получим:

$$\left(-8\sqrt{2}\right)^2 = (-8)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 64 \cdot 2 = 128. ◄$$

Пример 2. Решите уравнение: 1) $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$; 2) $\sqrt{1 + \sqrt{x + 2}} = 2$.

Решение. 1) Имеем: $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{x} = 6$. Тогда $x = 6^2$; $x = 36$.

Ответ: 36.

2) $\sqrt{1 + \sqrt{x + 2}} = 2$; $1 + \sqrt{x + 2} = 2^2$; $\sqrt{x + 2} = 3$; $x + 2 = 3^2$; $x = 7$.

Ответ: 7. ◄

Пример 3. Решите уравнение $(x - 5)^2 = 16$.

Решение. $(x - 5)^2 = 16$;

$$x - 5 = -4 \quad \text{или} \quad x - 5 = 4;$$
$$x = 1 \quad \text{или} \quad x = 9.$$

Ответ: 1; 9. ◄

Пример 4. Решите уравнение $(3x - 1)^2 = 2$.

Решение. $(3x - 1)^2 = 2$;

$$3x - 1 = -\sqrt{2} \quad \text{или} \quad 3x - 1 = \sqrt{2};$$
$$3x = 1 - \sqrt{2} \quad \text{или} \quad 3x = 1 + \sqrt{2};$$
$$x = \frac{1 - \sqrt{2}}{3} \quad \text{или} \quad x = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{1 - \sqrt{2}}{3}$; $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$. ◄

Пример 5. При каких значениях x имеет смысл выражение: 1) $\sqrt{-5x}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{x} - 2}$?

Решение. 1) Выражение $\sqrt{-5x}$ имеет смысл, если подкоренное выражение $-5x$ принимает неотрицательные значения. Подкоренное выражение является произведением двух множителей, один из которых — отрицательное число. Следовательно, это произведение будет принимать неотрицательные значения, если другой множитель x будет принимать неположительные значения.

Ответ: при $x \leqslant 0$.

2) Данное выражение имеет смысл, если выполняются два условия: имеет смысл выражение $\sqrt{x}$ и знаменатель $\sqrt{x} - 2$ отличен от нуля. Следовательно, должны одновременно выполняться два условия: $x \geqslant 0$ и $\sqrt{x} - 2 \neq 0$. Отсюда $x \geqslant 0$ и $x \neq 4$.

Ответ: при $x \geqslant 0$ и $x \neq 4$. ◄

__**Пример 6.**__ Решите уравнение:

1) $\sqrt{-x} + \sqrt{x-2} = 2;$

2) $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x-2} = 0;$

3) $(x + 2)\sqrt{x-2} = 0.$

Решение. 1) Левая часть данного уравнения имеет смысл, если подкоренные выражения $-x$ и $x - 2$ одновременно принимают неотрицательные значения. Имеем: $-x \geqslant 0$, тогда $x \leqslant 0$. Понятно, что при $x \leqslant 0$ выражение $x - 2$ принимает только отрицательные значения. Следовательно, левая часть данного уравнения не имеет смысла.

Ответ: корней нет.

2) Левая часть данного уравнения является суммой двух слагаемых, каждое из которых может принимать только неотрицательные значения. Тогда их сумма равна нулю, если каждое из слагаемых равно нулю. Следовательно, одновременно должны выполняться два условия: $\sqrt{x^2 - 2x} = 0$ и $\sqrt{x-2} = 0$. Это означает, что надо найти общие корни полученных уравнений. В таких случаях говорят, что надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x} = 0, \\ \sqrt{x-2} = 0. \end{cases}$$

Имеем: $\begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x - 2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-2) = 0, \\ x = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \text{ или } x = 2, \\ x = 2. \end{cases}$

Решением последней системы, как и исходного уравнения, является число 2.

Ответ: 2.

3) Используя условие равенства произведения нулю, получаем:

$$x + 2 = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{x-2} = 0;$$
$$x = -2 \quad \text{или} \quad x = 2.$$

Однако при $x = -2$ выражение $\sqrt{x-2}$ не имеет смысла. Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень — число 2.

Ответ: 2.

1. Что называют квадратным корнем из числа a?
2. Что называют арифметическим квадратным корнем из числа a?
3. Как обозначают арифметический квадратный корень из числа a?
4. Как называют знак $\sqrt{}$?
5. Как читают запись $\sqrt{a}$?
6. Как называют выражение, стоящее под радикалом?
7. Какие значения может принимать подкоренное выражение?
8. Как называют действие нахождения арифметического квадратного корня из числа?
9. Чему равно значение выражения $\left(\sqrt{a}\right)^2$ для любого неотрицательного числа a?
10. Сколько корней имеет уравнение $x^2 = a$ при $a > 0$? Чему они равны?
11. Имеет ли корни уравнение $x^2 = a$ при $a = 0$; при $a < 0$?

Упражнения

377. Чему равен квадратный корень из числа 16; из числа 1; из числа 0? Чему равен арифметический квадратный корень из этих чисел?

378. Верно ли равенство (ответ обоснуйте):

1) $\sqrt{25} = 5$;
2) $\sqrt{0} = 0$;
3) $\sqrt{36} = -6$;
4) $\sqrt{0,4} = 0,2$;
5) $\sqrt{0,81} = 0,9$;
6) $\sqrt{10} = 100$?

379. Найдите значение арифметического квадратного корня:

1) $\sqrt{9}$;
2) $\sqrt{49}$;
3) $\sqrt{100}$;
4) $\sqrt{225}$;
5) $\sqrt{0,25}$;
6) $\sqrt{0,01}$;
7) $\sqrt{1,21}$;
8) $\sqrt{1,96}$;
9) $\sqrt{400}$;
10) $\sqrt{3600}$;
11) $\sqrt{\frac{1}{64}}$;
12) $\sqrt{\frac{4}{9}}$;
13) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$;
14) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$;
15) $\sqrt{0,0004}$;
16) $\sqrt{0,000025}$.

380. Найдите значение арифметического квадратного корня:

1) $\sqrt{36}$; 4) $\sqrt{0,04}$; 7) $\sqrt{2500}$; 10) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$;

2) $\sqrt{64}$; 5) $\sqrt{0,49}$; 8) $\sqrt{10\,000}$; 11) $\sqrt{0,0009}$;

3) $\sqrt{144}$; 6) $\sqrt{1,69}$; 9) $\sqrt{\frac{16}{121}}$; 12) $\sqrt{0,0196}$.

381. Имеет ли смысл выражение:

1) $\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{-2}$; 4) $\sqrt{(-2)^2}$; 5) $\left(\sqrt{-2}\right)^2$?

382. Найдите число, арифметический квадратный корень из которого равен:

1) 4; 2) 0; 3) 0,8; 4) $2\frac{1}{4}$; 5) 1,6; 6) –9.

383. Пользуясь таблицей квадратов натуральных чисел, приведённой на форзаце, найдите:

1) $\sqrt{484}$; 4) $\sqrt{5929}$; 7) $\sqrt{68,89}$;

2) $\sqrt{729}$; 5) $\sqrt{5,76}$; 8) $\sqrt{67\,600}$;

3) $\sqrt{1156}$; 6) $\sqrt{14,44}$; 9) $\sqrt{384\,400}$.

384. Найдите:

1) $\sqrt{841}$; 3) $\sqrt{9,61}$; 5) $\sqrt{72,25}$;

2) $\sqrt{1296}$; 4) $\sqrt{10,24}$; 6) $\sqrt{672\,400}$.

385. Пользуясь микрокалькулятором, найдите значение квадратного корня (результат округлите до сотых):

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{34}$; 4) $\sqrt{1,8}$; 5) $\sqrt{2,439}$.

386. Пользуясь микрокалькулятором, найдите значение квадратного корня (результат округлите до сотых):

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5,1}$; 3) $\sqrt{40}$; 4) $\sqrt{12,56}$.

387. Найдите значение выражения:

1) $\left(\sqrt{7}\right)^2$; 4) $-\left(\sqrt{10}\right)^2$; 7) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{4,2}\right)^2$; 5) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^2$;

3) $\left(-\sqrt{11}\right)^2$; 6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$; 9) $\left(-0,3\sqrt{2}\right)^2$.

388. Вычислите:

1) $\left(\sqrt{6}\right)^2$; 3) $\left(3\sqrt{2}\right)^2$; 5) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$;

2) $\left(-\sqrt{21}\right)^2$; 4) $\left(-4\sqrt{5}\right)^2$; 6) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\right)^2$.

389. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{16+9}$; 5) $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$; 9) $\left(\sqrt{13}\right)^2-3\cdot\left(\sqrt{8}\right)^2$;

2) $\sqrt{16}+\sqrt{9}$; 6) $\sqrt{0,81}+\sqrt{0,01}$; 10) $\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{18}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$;

3) $\sqrt{36}-\sqrt{49}$; 7) $\frac{1}{3}\sqrt{0,09}-2$; 11) $50\cdot\left(-\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)^2$;

4) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}$; 8) $-2\sqrt{0,16}+0,7$; 12) $\sqrt{4\cdot5^2-6^2}$.

390. Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt{3+\sqrt{36}}$; 3) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{225}$; 5) $\left(2\sqrt{6}\right)^2-3\left(\sqrt{21}\right)^2$;

2) $\sqrt{72-\sqrt{64}}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{900}+0,2\sqrt{1600}$; 6) $\sqrt{10^2-4\cdot3^2}$.

391. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{12+a}$, если $a=0,25$; 3) $\sqrt{2a-b}$, если $a=34$, $b=19$.

2) $\sqrt{7-3b}$, если $b=2$;

392. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{27+m}$, если $m=54$; 2) $\sqrt{m-3n}$, если $m=0,13$, $n=-0,04$.

393. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=9$; 2) $\sqrt{x}=\frac{1}{4}$; 3) $\sqrt{x}-0,2=0$; 4) $\sqrt{x}+7=0$.

394. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=20$; 2) $\sqrt{x}=-16$; 3) $\sqrt{x}-\frac{2}{3}=0$.

395. Решите уравнение:

1) $x^2=25$; 2) $x^2=0,49$; 3) $x^2=3$; 4) $x^2=-25$.

396. Решите уравнение:

1) $x^2=100$; 2) $x^2=0,81$; 3) $x^2=7$; 4) $x^2=3,6$.

397. Найдите значение выражения:

1) $-0,06\cdot\sqrt{10\,000}+\frac{8}{\sqrt{256}}-2,5\sqrt{3,24}$;

2) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{6,25}+\sqrt{2^3+17}$;

3) $\sqrt{1\frac{11}{25}}+3\sqrt{7\frac{1}{9}}-0,6\sqrt{3025}$;

4) $\left(\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2+\sqrt{26^2-24^2}$;

5) $\left(3\sqrt{8}\right)^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2-2\left(\sqrt{24}\right)^2$;

6) $\sqrt{144}:\sqrt{0,04}-\sqrt{2,56}\cdot\sqrt{2500}$.

398. Найдите значение выражения:

1) $0{,}15\sqrt{3600} - 0{,}18\sqrt{400} + \left(10\sqrt{0{,}08}\right)^2$;

2) $\dfrac{95}{\sqrt{361}} - \dfrac{13}{14}\sqrt{1\dfrac{27}{169}} + \sqrt{8^2 + 15^2}$;

3) $\left(-8\sqrt{\dfrac{1}{4}} + \dfrac{\sqrt{1{,}44}}{3} \cdot \sqrt{12{,}25}\right) : \left(0{,}1\sqrt{13}\right)^2$.

399. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x}$;
2) $\sqrt{-x}$;
3) $\sqrt{x^2}$;
4) $\sqrt{-x^2}$;
5) $\sqrt{x-8}$;
6) $\sqrt{8-x}$;
7) $\sqrt{x^2+8}$;
8) $\sqrt{(x-8)^2}$;
9) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$;
10) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$;
11) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$;
12) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}$;
13) $\dfrac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}}$;
14) $\sqrt{|x|}$;
15) $\sqrt{-|x|}$;
16) $\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$?

400. При каких значениях y имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{2y}$;
2) $\sqrt{-3y}$;
3) $\sqrt{y^3}$;
4) $\sqrt{-y^3}$;
5) $\sqrt{-y^4}$;
6) $\dfrac{1}{\sqrt{y}}$;
7) $\dfrac{1}{\sqrt{y}-1}$;
8) $\dfrac{1}{\sqrt{y}+1}$?

401. Решите уравнение:

1) $\sqrt{5x} - 4 = 0$;
2) $\sqrt{5x-4} = 0$;
3) $\sqrt{5x-4} = 6$;
4) $\dfrac{42}{\sqrt{x}} = 6$;
5) $\dfrac{18}{\sqrt{x+3}} = 9$;
6) $\sqrt{x^2-36} = 8$.

402. Решите уравнение:

1) $\dfrac{1}{3}\sqrt{x} - 2 = 0$;
2) $\sqrt{2x+3} = 11$;
3) $\dfrac{4}{\sqrt{x-5}} = 6$;
4) $\sqrt{130-x^2} = 9$.

403. Решите уравнение:

1) $(x+6)^2 = 0$;
2) $(x+6)^2 = 9$;
3) $(x+6)^2 = 3$;
4) $(7x+6)^2 = 5$.

404. Решите уравнение:

1) $(2x-3)^2 = 25$;
2) $(x-3)^2 = 7$;
3) $(2x-3)^2 = 7$.

405. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3+\sqrt{2+x}} = 4$;
2) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}} = 3$;
3) $\sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{x}}} = 2$.

406. Решите уравнение:

1) $\sqrt{17+\sqrt{\sqrt{x}-6}}=5$;
2) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=1$.

407. При каких значениях a и b имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{ab}$;
3) $\sqrt{ab^2}$;
5) $\sqrt{-a^2b}$?
2) $\sqrt{-ab}$;
4) $\sqrt{a^2b^2}$;

408. Можно ли утверждать, что при любом значении x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x^2-4x+4}$;
2) $\sqrt{x^2-4x+5}$?

409. Докажите, что не существует такого значения x, при котором имеет смысл выражение $\sqrt{-x^2+6x-12}$.

410. Какое из данных выражений имеет смысл при любом значении x:

1) $\sqrt{x^2+8x+15}$;
2) $\sqrt{x^2-10x+27}$?

411. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=-x$;
4) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4}=0$;
2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=0$;
5) $(x-1)\sqrt{x+1}=0$;
3) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x-1}=0$;
6) $(x+1)\sqrt{x-1}=0$.

412. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$;
3) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-1}=0$;
2) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=1$;
4) $(x-2)\sqrt{x-3}=0$.

413. При каком значении a уравнение $x^2=a+1$:

1) имеет два корня;
2) имеет один корень;
3) не имеет корней?

414. Постройте график функции:

1) $y=\sqrt{-x^2}$;
2) $y=\sqrt{-x^2-4x-4}+2$;
3) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$.

415. Постройте график функции $y=\sqrt{2x-1-x^2}-1$.

416. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $a\sqrt{x-1}=0$;
3) $a\sqrt{x-1}=a$;
2) $\sqrt{(a-1)x}=0$;
4) $\sqrt{x-2}=a$.

417. При каких значениях a уравнение $\left(\sqrt{x}-1\right)(x-a)=0$ имеет только один корень?

Упражнения для повторения

418. Дома на улице пронумерованы подряд числами от 1 до 24. Сколько раз цифра 1 встречается в нумерации домов?

419. Упростите выражение:

$$\left(\frac{a}{a^2-25}+\frac{5}{5-a}+\frac{1}{a+5}\right):\left(\frac{28-a^2}{a+5}+a-5\right).$$

420. Рабочий получил 4700 р. аванса купюрами по 100 р. и по 500 р. Сколько было купюр каждого достоинства, если всего была 31 купюра?

Учимся делать нестандартные шаги

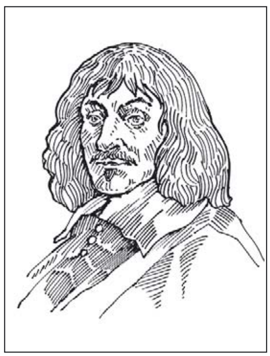
421. Найдите все трёхзначные натуральные числа n такие, что сумма цифр числа n в 11 раз меньше самого числа n.

Когда сделаны уроки

Растут ли в огороде радикалы?

В Древней Греции действие извлечения корня отождествляли с поиском стороны квадрата по его площади, а сам квадратный корень называли стороной.

В Древней Индии слово «мула» означало «начало», «основание», «корень дерева». Это же слово стали употреблять и по отношению к стороне квадрата, исходя, возможно, из такой ассоциации: из стороны квадрата, как из корня, вырастает сам квадрат. Видимо, поэтому в латинском языке понятия «сторона» и «корень» выражаются одним и тем же словом — *radix*. От этого слова произошёл термин «радикал».



Рене Декарт

Слово *radix* можно также перевести как «редис», то есть корнеплод — часть растения — видоизменённый корень, который может являться съедобным.

В XIII–XV вв. европейские математики, сокращая слово *radix*, обозначали квадратный корень знаками R, R, R^2. Например, запись $\sqrt{7}$ выглядела так: $R^2 7$.

В XVI в. стали использовать знак $\sqrt{}$. Происхождение этого символа, по-видимому, связано с рукописным начертанием латинской буквы r.

В XVII в. выдающийся французский математик Рене Декарт (1596–1650), соединив знак $\surd$ с горизонтальной чёрточкой, получил символ $\sqrt{\ }$, который мы и используем сегодня.

§ 13. Множество и его элементы

Мы часто говорим: косяк рыб, стая птиц, рой пчёл, коллекция марок, собрание картин, набор ручек, букет цветов, компания друзей, парк автомобилей, отара овец.

Если в этих парах перемешать первые слова, то может получиться смешно. Например: букет овец, косяк картин, коллекция друзей и т. д. В то же время такие словосочетания, как коллекция рыб, коллекция картин, коллекция ручек, коллекция автомобилей и т. д., вполне приемлемы. Дело в том, что слово «коллекция» достаточно универсальное. Однако в математике есть всеобъемлющее слово, которым можно заменить любое из первых слов в данных парах. Это слово **множество**.

Приведём ещё несколько примеров множеств:

- множество учеников вашего класса;
- множество планет Солнечной системы;
- множество двузначных чисел;
- множество пар чисел $(x;\ y)$, являющихся решениями уравнения $x^2 + y^2 = 1$.

Отдельным важнейшим множествам присвоены общепринятые названия и обозначения:

- множество точек плоскости — **геометрическая фигура**;
- множество точек, обладающих заданным свойством, — **геометрическое место точек (ГМТ)**;
- множество значений аргумента функции f — **область определения функции** f, которую обозначают $D(f)$;
- множество значений функции f — **область значений функции** f, которую обозначают $E(f)$;
- множество натуральных чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{N}$.

Как правило, множества обозначают прописными латинскими буквами: A, B, C, D и т. д.

Объекты, составляющие данное множество, называют **элементами** этого множества. Обычно элементы обозначают строчными латинскими буквами: a, b, c, d и т. д.

Если элемент a является элементом множества A, то пишут: $a \in A$ (читают: «a принадлежит множеству A»). Если элемент b не является элементом множества A, то пишут: $b \notin A$ (читают: «b не принадлежит множеству A»).

Например, $12 \in \boldsymbol{N}$, $-3 \notin \boldsymbol{N}$, $\frac{2}{3} \notin \boldsymbol{N}$.

Если множество A состоит, например, из трёх элементов a, b, c, то пишут $A = \{a, b, c\}$.

Так, если M – множество натуральных делителей числа 6, то пишут $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множество делителей числа 6, являющихся составными числами, выглядит так: $\{6\}$. Это пример **одноэлементного** множества.

Задание множества с помощью фигурных скобок, в которых указан список его элементов, удобно в тех случаях, когда множество состоит из небольшого количества элементов.

Определение

Два множества A и B называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть каждый элемент множества A принадлежит множеству B и наоборот — каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

Если множества A и B равны, то пишут $A = B$.

Из определения следует, что ***множество однозначно определяется своими элементами***. Если множество записано с помощью фигурных скобок, то порядок, в котором выписаны его элементы, не имеет значения. Так, множество, состоящее из трёх элементов a, b, c, допускает шесть вариантов записи:

$\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $\{c, b, a\}$.

Поскольку из определения равных множеств следует, что, например, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то в дальнейшем будем рассматривать множества, состоящие из разных элементов. Так, множество букв слова «космодром» имеет вид {к, о, с, м, д, р}.

Заметим, что $\{a\} \neq \{\{a\}\}$. Действительно, множество $\{a\}$ состоит из одного элемента a; множество $\{\{a\}\}$ состоит из одного элемента – множества $\{a\}$.

Чаще всего множество задают одним из двух следующих способов.

Первый способ состоит в том, что множество задают указанием (перечислением) всех его элементов. Мы уже использовали этот способ, записывая множество с помощью фигурных скобок, в которых указывали список его элементов. Ясно, что не всякое множество можно задать таким способом. Например, множество чётных чисел так задать невозможно.

Второй способ состоит в том, что указывается **характеристическое свойство** элементов множества, то есть свойство, которым обладают все элементы данного множества и только они. Например, свойство «натуральное число при делении на 2 даёт в остатке 1» задаёт множество нечётных чисел.

Если задавать множество характеристическим свойством его элементов, то может оказаться, что ни один объект этим свойством не обладает.

Обратимся к примерам.

• Множество треугольников, стороны которых пропорциональны числам 1, 2, 5. Из неравенства треугольника следует, что это множество не содержит ни одного элемента.

• Обозначим через A множество учеников вашего класса, являющихся мастерами спорта по шахматам. Может оказаться, что множество A также не содержит ни одного элемента.

• Рассматривая множество корней произвольного уравнения, следует предусмотреть ситуацию, когда уравнение корней не имеет.

Приведённые примеры указывают на то, что удобно к совокупности множеств отнести ещё одно особенное множество, не содержащее ни одного элемента. Его называют **пустым множеством** и обозначают символом $\varnothing$.

Заметим, что множество $\{\varnothing\}$ не является пустым. Оно содержит один элемент — пустое множество.

1. Как обозначают множество и его элементы?
2. Как обозначают множество натуральных чисел?
3. Как обозначают область определения и область значений функции?
4. Как записать, что элемент принадлежит (не принадлежит) множеству A?
5. Какие множества называют равными?
6. Какие существуют способы задания множеств?
7. Какое множество называют пустым? Как его обозначают?

Упражнения

422. Как называют множество точек угла, равноудалённых от его сторон?

423. Как называют множество волков, подчиняющихся одному вожаку?

424. Назовите какое-нибудь множество учеников вашей школы.

425. Как называют множество учителей, работающих в одной школе?

426. Поставьте вместо звёздочки знак $\in$ или $\notin$ так, чтобы получилось верное утверждение:
1) $5 * \boldsymbol{N}$; 2) $0 * \boldsymbol{N}$; 3) $-5 * \boldsymbol{N}$.

427. Дана функция $f(x) = x^2$. Поставьте вместо звёздочки знак $\in$ или $\notin$ так, чтобы получилось верное утверждение:
1) $3 * D(f)$; 2) $0 * D(f)$; 3) $0 * E(f)$; 4) $-\frac{1}{2} * E(f)$.

428. Истинным или ложным является высказывание:
1) $1 \in \{1, 2, 3\}$; 3) $\{1\} \in \{1, 2\}$; 5) $\varnothing \notin \{1, 2\}$;
2) $1 \notin \{1\}$; 4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$; 6) $\varnothing \in \{\varnothing\}$?

429. Запишите множество корней уравнения:

1) $x(x-1)=0$;
2) $(x-2)(x^2-4)=0$;
3) $x=2$;
4) $x^2+3=0$.

430. Задайте с помощью перечисления элементов множество:

1) правильных дробей со знаменателем 7;
2) правильных дробей, знаменатель которых не больше 4;
3) букв слова «математика»;
4) цифр числа 5555.

431. Равны ли множества A и B, если:

1) $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 1\}$;
2) $A=\{(1; 0)\}$, $B=\{(0; 1)\}$;
3) $A=\{1\}$, $B=\{\{1\}\}$?

432. Равны ли множества A и B, если:

1) A — множество корней уравнения $|x|=x$, B — множество неотрицательных чисел;
2) A — множество четырёхугольников, у которых противоположные стороны попарно равны; B — множество четырёхугольников, у которых диагонали точкой пересечения делятся пополам?

433. Какие из следующих множеств равны пустому множеству:

1) множество треугольников, сумма углов которых равна 181°;
2) множество горных вершин высотой более 8800 м;
3) множество остроугольных треугольников, медиана которых равна половине стороны, к которой она проведена;
4) множество функций, графиками которых являются окружности?

Упражнения для повторения

434. Упростите выражение:

1) $\frac{5b}{b-3}-\frac{b+6}{2b-6}\cdot\frac{90}{b^2+6b}$;
2) $\frac{b+2}{b^2-2b+1}:\frac{b^2-4}{3b-3}-\frac{3}{b-2}$.

435. Моторная лодка проплыла 36 км по течению реки за 3 ч и 36,8 км против течения за 4 ч. Какова скорость течения реки?

436. В коробке лежат 42 карандаша, из них 14 карандашей — красные, 16 карандашей — синие, а остальные — зелёные. Какова вероятность того, что наугад взятый карандаш не будет ни красным, ни синим?

Учимся делать нестандартные шаги

437. Петя и Коля ежедневно записывают по одному числу. В первый день каждый из мальчиков записал число 1. В каждый последующий день

Петя записывает число 1, а Коля — число, равное сумме чисел, записанных мальчиками за предыдущие дни. Может ли в какой-то день Коля записать число, оканчивающееся на 101?

§ 14. Подмножество. Операции над множествами

Рассмотрим множество цифр десятичной системы счисления: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Выделим из множества A его элементы, являющиеся чётными цифрами. Получим множество $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, все элементы которого являются элементами множества A.

Определение

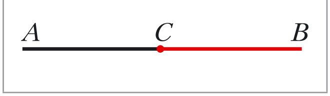
Множество B называют подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Это записывают так: $B \subset A$ или $A \supset B$ (читают: «множество B — подмножество множества A» или «множество A содержит множество B»).

Рассмотрим примеры:

- множество учеников вашего класса является подмножеством множества учеников вашей школы;
- множество млекопитающих является подмножеством множества позвоночных;
- множество точек луча CB является подмножеством множества точек прямой AB (рис. 19);
- множество прямоугольников является подмножеством множества параллелограммов;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$.

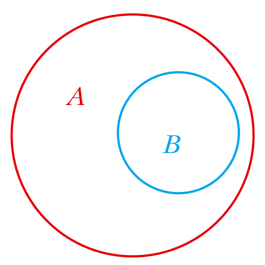
Рис. 19



Для иллюстрации соотношений между множествами пользуются схемами, которые называют **диаграммами Эйлера**.

На рисунке 20 изображены множество A (больший круг) и множество B (меньший круг, содержащийся в большем). Эта схема означает, что $B \subset A$ (или $A \supset B$).

Рис. 20



Если $B \subset A$, то с помощью рисунка 20 можно сделать такие выводы:

1) для того чтобы элемент x принадлежал множеству A, достаточно, чтобы он принадлежал множеству B;

2) для того чтобы элемент x принадлежал множеству B, необходимо, чтобы он принадлежал множеству A.

Например, если A — множество натуральных чисел, кратных 5, а B — множество натуральных чисел, кратных 10, то очевидно, что $B \subset A$. Поэтому, для того чтобы натуральное число n было кратным 5 ($n \in A$), достаточно, чтобы оно было кратным 10 ($n \in B$). Для того чтобы натуральное число n было кратным 10 ($n \in B$), необходимо, чтобы оно было кратным 5 ($n \in A$).

Из определений подмножества и равенства множеств следует, что если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

Если в множестве B нет элемента, не принадлежащего множеству A, то множество B является подмножеством множества A. В силу этих соображений пустое множество считают подмножеством любого множества. Действительно, пустое множество не содержит ни одного элемента, следовательно, в нём нет элемента, который не принадлежит данному множеству A. Поэтому для любого множества A справедливо утверждение: $\varnothing \subset A$.

Любое множество A является подмножеством самого себя, то есть $A \subset A$.

Пример 1. Выпишите все подмножества множества $A = \{a, b, c\}$.

Решение. Имеем: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$. Всего получили восемь подмножеств. В старших классах будет доказано, что количество подмножеств n-элементного множества равно 2^n. ◄

Пусть A — множество решений уравнения $x + y = 5$, а B — множество решений уравнения $x - y = 3$. Тогда множество C решений системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3 \end{cases}$$

состоит из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B. В этом случае говорят, что множество C является **пересечением** множеств A и B.

Определение

Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B.

Пересечение множеств A и B обозначают так: $A \cap B$.

Легко убедиться, что решением рассмотренной системы уравнений является пара (4; 1). Тогда можно записать: $A \cap B = \{(4; 1)\}$.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечением является пустое множество, то есть $A \cap B = \varnothing$. Также заметим, что для любого множества A выполняется равенство $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Из определения пересечения двух множеств следует, что если $A \subset B$, то $A \cap B = A$, в частности, если $B = A$, то $A \cap A = A$.

Пересечение множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера. На рисунке 21 заштрихованная фигура изображает множество $A \cap B$.

Рис. 21

Определение

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество значений переменной x, при которых имеют смысл обе части уравнения.

Из определения следует, что областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ является множество $D(f) \cap D(g)$. Например, областью определения уравнения $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$ является пересечение множества неотрицательных чисел и множества всех чисел, не равных нулю, то есть множество положительных чисел.

Для того чтобы решить уравнение $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, надо решить каждое из уравнений $x^2 - x = 0$ и $x^2 - 1 = 0$.

Имеем: $A = \{0, 1\}$ — множество корней первого уравнения, $B = \{-1, 1\}$ — множество корней второго уравнения. Понятно, что множество $C = \{-1, 0, 1\}$, каждый элемент которого принадлежит или множеству A, или множеству B, является множеством корней исходного уравнения. Множество C называют **объединением** множеств A и B.

Определение

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B.

Объединение множеств A и B обозначают так: $A \cup B$.

Если требуется найти объединение множеств решений уравнений, то говорят, что требуется решить **совокупность уравнений**.

Совокупность записывают с помощью квадратной скобки. Так, чтобы решить уравнение $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, нужно решить совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0, \\ x^2 - 1 = 0. \end{array}\right.$$

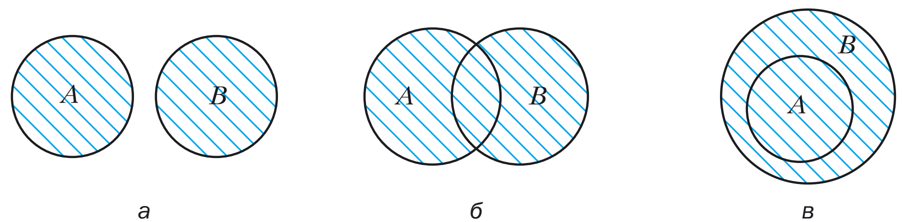
Все её решения образуют множество $\{-1, 0, 1\}$.

Заметим, что для любого множества A выполняется равенство $A \cup \varnothing = A$.

Из определения объединения двух множеств следует, что если $A \subset B$, то $A \cup B = B$, в частности, если $B = A$, то $A \cup A = A$.

Объединение множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера. На рисунке 22 заштрихованная фигура изображает множество $A \cup B$.

Рис. 22



Часто приходится рассматривать пересечение и объединение трёх и более множеств.

Пересечение множеств A, B и C — это множество всех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B, и множеству C (рис. 23).

Рис. 23

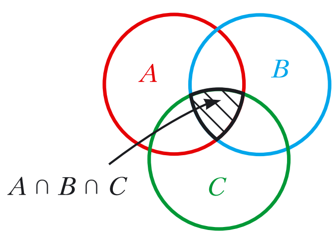
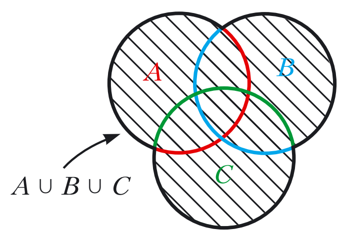


Рис. 24



Объединение множеств A, B и C – это множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B, или множеству C (рис. 24).

Например, объединение множеств остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольников – это множество всех треугольников.

Пример 2. Найдите пересечение множеств A и B, если:

1) A – множество ромбов, B – множество прямоугольников;

2) A – множество чётных чисел, B – множество простых чисел.

Решение. 1) Множество $A \cap B$ состоит из всех четырёхугольников, которые одновременно являются и ромбами, и прямоугольниками. Следовательно, искомое множество – это множество квадратов.

2) Поскольку множество простых чисел содержит только одно чётное число (число 2), то $A \cap B = \{2\}$. ◄

Пример 3. Найдите объединение множеств A и B, если:

1) A – множество нечётных натуральных чисел, B – множество чётных натуральных чисел;

2) A – множество целых выражений, B – множество дробных выражений.

Ответ. 1) $A \cup B$ – это множество натуральных чисел, то есть $A \cup B = \boldsymbol{N}$.

2) $A \cup B$ – это множество рациональных выражений. ◄

1. Какое множество называют подмножеством данного множества?
2. Как наглядно иллюстрируют соотношение между множествами?
3. Какое множество является подмножеством любого множества?
4. Что называют пересечением двух множеств?
5. Что называют объединением двух множеств?

Упражнения

438. Назовите несколько подмножеств учащихся вашего класса.

439. Назовите какие-нибудь геометрические фигуры, которые являются подмножествами: 1) множества точек прямой; 2) множества точек круга.

440. Пусть A – множество букв слова «координата». Множества букв каких слов являются подмножествами множества A:

1) нора;	5) нитки;	9) ордината;
2) трактор;	6) корка;	10) дорога;
3) картина;	7) дар;	11) корона;
4) крокодил;	8) подарок;	12) кардинал?

441. Пусть A – множество цифр числа 1958. Является ли множество цифр числа x подмножеством множества A, если:
1) $x = 98$; 3) $x = 519$; 5) $x = 195\,888$;
2) $x = 9510$; 4) $x = 5858$; 6) $x = 91\,258$?

442. Пусть $A \neq \varnothing$. Какие два разных подмножества всегда имеет множество A?

443. Найдите пересечение множеств цифр, используемых в записи чисел:
1) 555 288 и 82 223; 2) 470 713 и 400 007.

444. Пусть A – множество двузначных чисел, B – множество простых чисел. Принадлежит ли множеству $A \cap B$ число: 5, 7, 11, 31, 57, 96?

445. Найдите множество общих делителей чисел 30 и 45.

446. Найдите объединение множеств цифр, используемых в записи чисел:
1) 27 288 и 56 383; 2) 55 555 и 777 777.

447. Запишите все подмножества множества $\{1, 2\}$.

448. Истинным или ложным является высказывание:
1) $\{a\} \in \{a, b\}$; 3) $a \subset \{a, b\}$;
2) $\{a\} \subset \{a, b\}$; 4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

449. Докажите, что если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

450. Разместите данные множества в такой последовательности, чтобы каждое следующее множество было подмножеством предыдущего:
1) A – множество прямоугольников, B – множество четырёхугольников, C – множество квадратов, D – множество параллелограммов;
2) A – множество млекопитающих, B – множество псовых, C – множество позвоночных, D – множество волков, E – множество хищных млекопитающих.

451. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера соотношение между множествами:
1) A – множество неотрицательных чисел; $B = \{0\}$; $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел;
2) $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел; A – множество натуральных чисел, кратных 6; B – множество натуральных чисел, кратных 3.

452. Истинным или ложным является высказывание:
1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$; 3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$;
2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$; 4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

453. Найдите пересечение множеств A и B, если:
1) A – множество равнобедренных треугольников, B – множество равносторонних треугольников;
2) A – множество прямоугольных треугольников, B – множество равносторонних треугольников;
3) A – множество двузначных чисел, B – множество натуральных чисел, кратных 19;
4) A – множество однозначных чисел, B – множество простых чисел.

454. Какие фигуры могут быть пересечением двух лучей, лежащих на одной прямой?

455. Какие из следующих утверждений верны:

1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$;
2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$;
3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

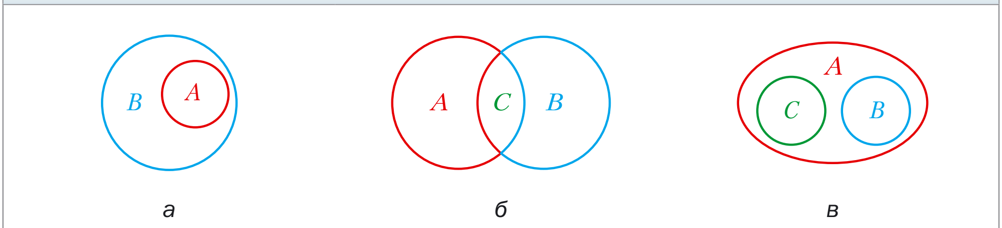
456. Найдите объединение множеств A и B, если:

1) A — множество равнобедренных треугольников, B — множество равносторонних треугольников;
2) A — множество простых чисел, B — множество составных чисел;
3) A — множество простых чисел, B — множество нечётных чисел.

457. Какие фигуры могут быть объединением двух лучей, лежащих на одной прямой?

458. Опишите на языке «необходимо и достаточно» принадлежность элемента x множествам: 1) A и B (рис. 25, *а*); 2) A, B и C (рис. 25, *б*, *в*).

Рис. 25



459. Вместо точек поставьте слово «необходимо» или «достаточно», чтобы образовалось верное утверждение:

1) для того чтобы треугольник был равносторонним, ... , чтобы два его угла были равны;
2) для того чтобы четырёхугольник был параллелограммом, ... , чтобы две его стороны были параллельны;
3) для того чтобы число делилось нацело на 3, ... , чтобы оно делилось нацело на 9;
4) для того чтобы последняя цифра десятичной записи числа была нулём, ... , чтобы число было кратным 5.

Упражнения для повторения

460. Упростите выражение:

1) $3a^{-6}b^2 \cdot 0,4a^{-2}b^{-5}$;
2) $\dfrac{4,8a^2b^{-4}}{0,6a^3b^{-6}}$.

461. В саду растёт более 80, но менее 100 деревьев. Каждое третье дерево — яблоня, а каждое восьмое — груша. Сколько деревьев растёт в саду?

462. Известно, что $\frac{a}{b} = 3$. Найдите значение выражения $\frac{2a - 3b}{a}$.

Готовимся к изучению новой темы

463. Сравните:
1) 2,4578 и 2,4569; 2) −1,9806 и −1,981.

464. Прочитайте периодическую дробь и назовите её период:
1) 0,(5); 2) 1,(32); 3) 8,4(65); 4) 3,424242... .

465. Преобразуйте в десятичную дробь:
1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{7}{16}$; 4) $\frac{97}{80}$; 5) $\frac{42}{15}$.

466. Преобразуйте обыкновенную дробь в бесконечную периодическую десятичную дробь и определите её период:
1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{11}{15}$; 3) $\frac{9}{11}$; 4) $\frac{31}{33}$.

Учимся делать нестандартные шаги

467. Попарно различные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2(b + c) = b^2(c + a)$. Докажите, что $a^2(b + c) = c^2(a + b)$.

§ 15. Числовые множества

Натуральные числа — это первые числа, которыми начали пользоваться люди. С ними вы познакомились в детстве, когда учились считать предметы. Все натуральные числа образуют **множество натуральных чисел**, которое, как вы знаете, обозначают буквой $\boldsymbol{N}$.

Практические потребности людей привели к возникновению дробных чисел. Позже появилась необходимость рассматривать величины, для характеристики которых положительных чисел оказалось недостаточно. Так возникли отрицательные числа.

Все натуральные числа, противоположные им числа и число нуль образуют **множество целых чисел**, которое обозначают буквой $\boldsymbol{Z}$.

Например, $-2 \in \boldsymbol{Z}$, $0 \in \boldsymbol{Z}$, $5 \in \boldsymbol{Z}$.

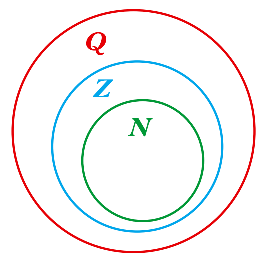
Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел, то есть $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$.

Целые и дробные (как положительные, так и отрицательные) числа образуют **множество рациональных чисел**, которое обозначают буквой $\boldsymbol{Q}$.

Например, $\frac{2}{3} \in \boldsymbol{Q}$, $-0,2 \in \boldsymbol{Q}$, $0 \in \boldsymbol{Q}$, $-3 \in \boldsymbol{Q}$, $15 \in \boldsymbol{Q}$.

Понятно, что $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$. Схема на рисунке 26 показывает, как соотносятся множества $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{Q}$.

Рис. 26



Каждое рациональное число можно представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное. Например, $5 = \frac{5}{1}$; $-3 = \frac{-3}{1}$; $0,2 = \frac{1}{5}$; $0 = \frac{0}{7}$; $5,3 = \frac{53}{10}$.

С возможностью такого представления связано название «рациональное число»: одним из значений латинского слова *ratio* является «отношение».

В 6 классе вы узнали, что каждое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Для дроби $\frac{m}{n}$ такое представление можно получить, выполнив деление числа m на число n уголком.

Например, $\frac{5}{8} = 0,625$; $\frac{5}{11} = 0,454545...$.

Число $\frac{5}{8}$ записано в виде конечной десятичной дроби, а число $\frac{5}{11}$ — в виде бесконечной периодической десятичной дроби. В записи 0,454545... цифры 4 и 5 периодически повторяются. Повторяющуюся группу цифр называют **периодом дроби** и записывают в круглых скобках. В данном случае период дроби равен 45, а дробь $\frac{5}{11}$ записывают так: $\frac{5}{11} = 0,(45)$.

Заметим, что любую конечную десятичную дробь и любое целое число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Например,

$0,625 = 0,6250000... = 0,625(0)$;

$2 = 2,000... = 2,(0)$.

Следовательно, ***каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби***.

Справедливо и такое утверждение: ***каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является записью некоторого рационального числа***.

В 9 классе вы научитесь записывать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби.

Сумма и произведение двух натуральных чисел являются натуральными числами. Однако разность натуральных чисел не всегда обладает таким свойством. Например, $(5 - 7) \notin \boldsymbol{N}$.

Сумма, разность, произведение двух целых чисел являются целыми числами. Однако частное целых чисел не всегда обладает таким свойством. Например, $\frac{5}{7} \notin \boldsymbol{Z}$.

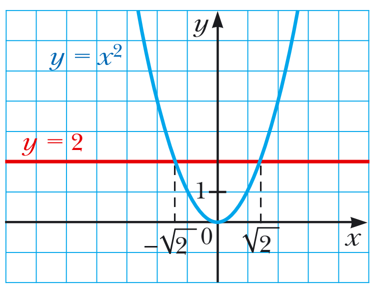
Сумма, разность, произведение и частное (кроме деления на нуль) двух рациональных чисел являются рациональными числами.

Итак, действие вычитания натуральных чисел может вывести результат за пределы множества $\boldsymbol{N}$, действие деления целых чисел — за пределы множества $\boldsymbol{Z}$, однако выполнение любого из четырёх арифметических действий с рациональными числами не выводит результат за пределы множества $\boldsymbol{Q}$.

Вы познакомились с новым действием — извлечение квадратного корня. Возникает естественный вопрос: всегда ли квадратный корень из неотрицательного рационального числа является рациональным числом? Иными словами: может ли действие извлечения квадратного корня из рационального числа вывести результат за пределы множества $\boldsymbol{Q}$?

Рассмотрим уравнение $x^2 = 2$. Поскольку $2 > 0$, то это уравнение имеет два корня: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ (рис. 27). Однако *не существует рационального числа, квадрат которого равен 2* (доказательство этого факта вы можете найти в разделе «Когда сделаны уроки» в рассказе «Открытие иррациональности»), то есть числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ не являются рациональными. Эти числа являются примерами **иррациональных чисел** (приставка «ир» означает отрицание).

Рис. 27



Следовательно, действие извлечения корня из рационального числа может вывести результат за пределы множества $\boldsymbol{Q}$.

Никакое иррациональное число не может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, а следовательно, и в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Иррациональные числа могут быть представлены в виде **бесконечных непериодических десятичных дробей**.

Например, с помощью специальной компьютерной программы можно установить, что

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots .$$

Числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ – это не первые иррациональные числа, с которыми вы встречаетесь. Число π, равное отношению длины окружности к диаметру, также является иррациональным:

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795028841971693 9937\ldots .$$

Иррациональные числа возникают не только в результате извлечения квадратных корней. Их можно конструировать, строя бесконечные непериодические десятичные дроби.

Например, число 0,1010010001000010000 0... (после запятой записываются последовательно степени числа 10) является иррациональным. Если предположить, что у рассматриваемой десятичной дроби есть период, состоящий из n цифр, то с некоторого места этот период будет полностью состоять из нулей, то есть начиная с этого места в записи не должна встретиться ни одна единица, что противоречит конструкции числа.

Объединение множеств иррациональных и рациональных чисел называют **множеством действительных чисел**. Его обозначают буквой $\boldsymbol{R}$ (первой буквой латинского слова *realis* – «реальный», «существующий в действительности»).

Теперь цепочку $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$ можно продолжить: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

В старших классах вы узнаете, что эту цепочку также можно продлить.

Связь между числовыми множествами, рассмотренными в этом параграфе, иллюстрирует схема на рисунке 28.

Рис. 28

Длину любого отрезка можно выразить действительным числом. Этот факт позволяет установить связь между множеством $\boldsymbol{R}$ и множеством точек координатной прямой. Точке O, началу отсчёта, поставим в соответствие число 0. Каждой точке A координатной прямой, отличной от точки O, поставим в соответствие единственное число, равное длине отрезка OA, если точка A расположена справа от точки O, и число, противоположное длине отрезка OA, если точка A расположена слева от точки O. Также понятно, что каждое действительное число является соответствующим единственной точке координатной прямой.

Над действительными числами можно выполнять четыре арифметических действия: сложение, вычитание, умножение, деление (кроме деления на ноль), в результате будем получать действительное число. Действия сложения и умножения обладают известными вам свойствами.

$a + b = b + a$	Переместительное свойство сложения
$ab = ba$	Переместительное свойство умножения
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Сочетательное свойство сложения
$(ab)c = a(bc)$	Сочетательное свойство умножения
$a(b + c) = ab + ac$	Распределительное свойство умножения относительно сложения

Действительные числа можно сравнивать, используя правила сравнения десятичных дробей, то есть сравнивая цифры в соответствующих разрядах. Например, $7{,}853126... < 7{,}853211...$.

Любое положительное действительное число больше нуля и любого отрицательного действительного числа. Любое отрицательное действительное число меньше нуля. Из двух отрицательных действительных чисел больше то, у которого модуль меньше.

Если отметить на координатной прямой два действительных числа, то меньшее из них будет расположено слева от большего.

Находя длину окружности и площадь круга, вы пользовались **приближённым значением числа** π (например, $\pi \approx 3{,}14$). Аналогично при решении практических задач, где нужно выполнить действия с действительными числами, при необходимости эти числа заменяют их приближёнными значениями. Например, для числа $\sqrt{2}$ можно воспользоваться такими приближёнными равенствами: $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ или $\sqrt{2} \approx 1{,}415$. Первое из них называют приближённым значением числа $\sqrt{2}$ по недостатку с точностью до 0,001, второе – приближённым значением числа $\sqrt{2}$ по избытку с точностью до 0,001. Более подробно о приближённых значениях будет рассказано в 9 классе.

В заключение подчеркнём, что из любого неотрицательного действительного числа можно извлечь квадратный корень и в результате этого действия получить действительное число, то есть действие извлечения квадратного корня из неотрицательного действительного числа не выводит результат за пределы множества $\boldsymbol{R}$.

1. Какие числа образуют множество целых чисел?
2. Какой буквой обозначают множество целых чисел?
3. Какие числа образуют множество рациональных чисел?
4. Какой буквой обозначают множество рациональных чисел?
5. В виде какого отношения можно представить каждое рациональное число?
6. Как связаны между собой рациональные числа и бесконечные периодические десятичные дроби?
7. Как называют числа, не являющиеся рациональными?
8. Объединение каких множеств образует множество действительных чисел?
9. Какой буквой обозначают множество действительных чисел?
10. Как взаимосвязаны числовые множества $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$?

Упражнения

468. Какое из данных утверждений неверно:

1) -3 — действительное число;
2) -3 — рациональное число;
3) -3 — целое число;
4) -3 — натуральное число?

469. Верно ли утверждение:

1) $1 \in \boldsymbol{N}$;
2) $1 \in \boldsymbol{Z}$;
3) $1 \in \boldsymbol{Q}$;
4) $1 \in \boldsymbol{R}$;
5) $-2{,}3 \in \boldsymbol{N}$;
6) $-2{,}3 \in \boldsymbol{R}$;
7) $\sqrt{7} \notin \boldsymbol{R}$;
8) $\sqrt{121} \notin \boldsymbol{R}$;
9) $\frac{\pi}{3} \in \boldsymbol{R}$?

470. Верно ли утверждение:

1) $0 \in \boldsymbol{N}$;
2) $0 \notin \boldsymbol{Z}$;
3) $0 \in \boldsymbol{R}$;
4) $-\frac{3}{7} \in \boldsymbol{Q}$;
5) $-\frac{3}{7} \notin \boldsymbol{R}$;
6) $\sqrt{9} \in \boldsymbol{Q}$;
7) $\sqrt{9} \in \boldsymbol{Z}$;
8) $\sqrt{9} \in \boldsymbol{R}$?

471. Истинным или ложным является высказывание:

1) любое натуральное число является целым;
2) любое натуральное число является рациональным;
3) любое натуральное число является действительным;

4) любое рациональное число является целым;
5) любое действительное число является рациональным;
6) любое рациональное число является действительным;
7) любое иррациональное число является действительным;
8) любое действительное число является рациональным или иррациональным?

472. Какие из данных бесконечных дробей являются записями рациональных чисел, а какие — иррациональных:
1) 0,(3);
2) 0,4(32);
3) 0,20200200020... (количество нулей между соседними двойками последовательно увеличивается на 1)?

473. Сравните:
1) 6,542... и 6,452... ; 2) −24,064... и −24,165... .

474. Сравните:
1) 0,234... и 0,225... ; 2) −1,333... и −1,345... .

475. С помощью микрокалькулятора найдите приближённое значение числа $\sqrt{3}$ с точностью до 0,01: 1) по недостатку; 2) по избытку.

476. С помощью микрокалькулятора найдите приближённое значение числа $\sqrt{5}$ с точностью до 0,01: 1) по недостатку; 2) по избытку.

477. Укажите какое-нибудь значение a, при котором уравнение $x^2 = a$:
1) имеет два рациональных корня;
2) имеет два иррациональных корня;
3) не имеет корней.

478. Сравните числа:
1) $\frac{43}{7}$ и 6,12; 3) π и 3,(14); 5) 7,(18) и 7,(17).
2) 3,(24) и 3,24; 4) −2,(36) и −2,36;

479. Сравните числа:
1) $\frac{1}{6}$ и 0,2; 2) $\frac{7}{9}$ и 0,77; 3) −1,(645) и −1,(643).

480. Запишите в порядке убывания числа: 3,(16); π; −1,82... ; −0,08... ; 2,(136).

481. Запишите в порядке возрастания числа: 1,57; 1,571... ; $\frac{\pi}{2}$; 1,(56); 1,(572).

482. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел являются рациональными числами.

483. Докажите, что сумма рационального и иррационального чисел является числом иррациональным.

484. Истинным или ложным является высказывание:
1) сумма любых двух иррациональных чисел является числом иррациональным;
2) произведение любых двух иррациональных чисел является числом иррациональным;
3) произведение любого иррационального числа и любого рационального числа является числом иррациональным?

Упражнения для повторения

485. В каждом подъезде на каждом этаже девятиэтажного дома по восемь квартир. В каком подъезде и на каком этаже находится квартира № 186?

486. Натуральные числа a и b таковы, что a — чётное число, а b — нечётное. Значение какого из данных выражений не может быть натуральным числом:
1) $\frac{8b}{5a}$; 2) $\frac{a^2}{b^2}$; 3) $\frac{4a}{b}$; 4) $\frac{b^2}{a}$?

487. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения

$$\left(\frac{3}{4-4a+a^2}+\frac{2}{a^2-4}\right)\cdot(a-2)^2-\frac{2a-4}{a+2}$$

не зависит от значения a.

488. В ведре несколько литров воды. Если отлить половину воды, то в нём останется на 14 л воды меньше, чем помещается. Если долить 4 л, то объём воды составит $\frac{2}{3}$ того, что помещается в ведре. Сколько литров воды помещается в ведре?

Готовимся к изучению новой темы

489. Найдите значение выражения:
1) $|-3{,}5|-|2{,}6|$; 2) $|-9{,}6|-|-32|$.

490. Модуль какого числа равен 6?

491. Для каких чисел выполняется равенство:
1) $|a|=a$; 2) $|a|=-a$; 3) $|a|=|-a|$; 4) $|a|=-|a|$?

492. Для каких чисел одновременно выполняются оба равенства $|a|=a$ и $|a|=-a$?

493. Найдите значение каждого из выражений a^2, $(-a)^2$, $|a|^2$ при $a=-8$ и при $a=7$. Сделайте вывод.

494. Известно, что $a > 0$, $c < 0$. Сравните с нулём значение выражения:
1) a^3c^4; 2) ac^5.

Учимся делать нестандартные шаги

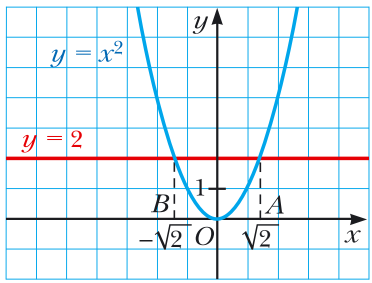
495. В роте 100 солдат. Каждую ночь на дежурство выходят три солдата. Можно ли так организовать дежурство, чтобы через некоторое время каждый солдат побывал на дежурстве с каждым из остальных солдат ровно один раз?

Когда сделаны уроки

Открытие иррациональности

В § 15, решая графически уравнение $x^2 = 2$, мы установили, что длина каждого из отрезков OA и OB равна $\sqrt{2}$ (рис. 29). Покажем, что число $\sqrt{2}$ — иррациональное.

Рис. 29



Предположим, что число $\sqrt{2}$ рациональное. Тогда его можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Имеем:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Тогда $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$; $2 = \frac{m^2}{n^2}$; $m^2 = 2n^2$.

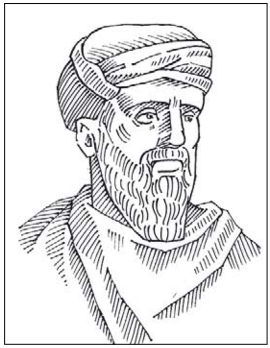
Из последнего равенства следует, что число m^2 чётное. А это значит, что чётным является и число m. Тогда $m = 2k$, где k — некоторое натуральное число. Имеем: $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $n^2 = 2k^2$. Отсюда следует, что число n^2, а следовательно, и число n — чётные.

Таким образом, числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ — чётные числа. Следовательно, эта дробь является сократимой. Получили противоречие.

Этот пример показывает, что существуют отрезки (в нашем случае это отрезки OA и OB на рис. 29), длины которых не выражаются рациональными числами, то есть *для измерения отрезков рациональных чисел недостаточно*.

Этот факт был открыт в школе великого древнегреческого учёного Пифагора.

Сначала пифагорейцы считали, что для любых отрезков AB и CD всегда можно найти такой отрезок MN, который в каждом из них укладывается целое число раз. Отсюда следовало, что отношение длин любых двух отрезков выражается отношением целых чисел, то есть рациональным числом.



Пифагор

Например, на рисунке 30 имеем: $AB = 5MN$, $CD = 2MN$ и $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$. Отрезок MN называют **общей мерой** отрезков AB и CD.

Если для отрезков существует общая мера, то их называют **соизмеримыми**. Например, отрезки AB и CD (см. рис. 30) являются соизмеримыми.

Итак, древнегреческие учёные считали, что любые два отрезка являются соизмеримыми. А из этого следовало, что длину любого отрезка можно выразить рациональным числом.

Действительно, пусть некоторый отрезок AB выбран в качестве единичного. Тогда для отрезка AB и любого другого отрезка CD существует отрезок длиной e, являющийся их общей мерой. Получаем $AB = ne$, $CD = me$, где m и n — некоторые натуральные числа. Отсюда $\frac{CD}{AB} = \frac{me}{ne} = \frac{m}{n}$. Поскольку $AB = 1$, то $CD = \frac{m}{n}$.

Однако сами же пифагорейцы сделали выдающееся открытие. Они доказали, что диагональ и сторона квадрата несоизмеримы, то есть доказали, что если сторону квадрата взять за единицу, то длину диагонали квадрата выразить рациональным числом нельзя.

Для доказательства рассмотрим произвольный квадрат $ABCD$ и примем его сторону за единицу длины. Тогда его площадь равна $AB^2 = 1$. На диагонали AC построим квадрат $ACEF$ (рис. 31). Понятно, что площадь

Рис. 30

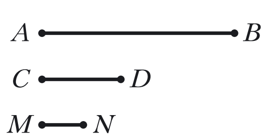
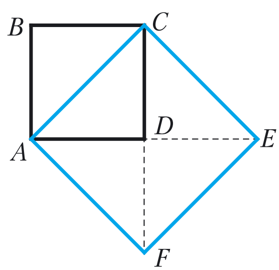


Рис. 31



квадрата $ACEF$ в 2 раза больше площади квадрата $ABCD$. Отсюда $AC^2 = 2$, то есть $AC = \sqrt{2}$. Следовательно, длина диагонали AC не может быть выражена рациональным числом.

Это открытие изменило один из фундаментальных постулатов древнегреческих учёных, заключавшийся в том, что отношение любых двух величин выражается отношением целых чисел.

Существует легенда о том, что пифагорейцы держали открытие иррациональных чисел в строжайшей тайне, а человека, разгласившего этот факт, покарали боги: он погиб при кораблекрушении.

Упражнения

1. Докажите, что число $\sqrt{3}$ – иррациональное.

2. Докажите, что если натуральное число n не является квадратом натурального числа, то число $\sqrt{n}$ – иррациональное.

§ 16. Свойства арифметического квадратного корня

Легко проверить, что $\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt{1{,}4^2} = 1{,}4$, $\sqrt{0^2} = 0$. Может показаться, что при любом значении a выполняется равенство $\sqrt{a^2} = a$. Однако это не так. Например, равенство $\sqrt{(-5)^2} = -5$ является ошибочным, поскольку $-5 < 0$. На самом деле $\sqrt{(-5)^2} = 5$. Также можно убедиться, что, например, $\sqrt{(-7)^2} = 7$, $\sqrt{(-2{,}8)^2} = 2{,}8$.

Вообще, справедлива следующая теорема.

Теорема 16.1

Для любого действительного числа a выполняется равенство

$$\sqrt{\boldsymbol{a}^2} = |\boldsymbol{a}|.$$

Доказательство

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt{a} = b$, надо показать, что $b \geqslant 0$ и $b^2 = a$.

Имеем: $|a| \geqslant 0$ при любом a.

Также из определения модуля следует, что $|a|^2 = a^2$. ◄

Следующая теорема обобщает доказанный факт.

Теорема 16.2
(арифметический квадратный корень из степени)

Для любого действительного числа a и любого натурального числа n выполняется равенство

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 16.1. Проведите это доказательство самостоятельно.

Теорема 16.3
(арифметический квадратный корень из произведения)

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доказательство

Имеем: $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\sqrt{b} \geqslant 0$. Тогда $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$. Кроме того, $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$. Следовательно, выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ принимает только неотрицательные значения, и его квадрат равен ab. ◄

Эту теорему можно обобщить для произведения трёх и более множителей. Например, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

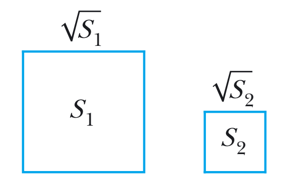
Теорема 16.4
(арифметический квадратный корень из дроби)

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b > 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 16.3. Проведите это доказательство самостоятельно.

Рис. 32



Понятно, что из двух квадратов с площадями S_1 и S_2 (рис. 32) бóльшую сторону имеет тот, у которого площадь больше, то есть если $S_1 > S_2$, то $\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}$. Это очевидное соображение иллюстрирует такое свойство арифметического квадратного корня: ***для любых неотрицательных чисел a_1 и a_2 таких, что $a_1 > a_2$, выполняется неравенство $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.***

Пример 1. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{(-7,3)^2}$; 2) $\sqrt{1,2^4}$; 3) $\sqrt{0,81 \cdot 225}$; 4) $\sqrt{\frac{16}{49}}$.

Решение. 1) $\sqrt{(-7,3)^2} = |-7,3| = 7,3.$

2) $\sqrt{1,2^4} = 1,2^2 = 1,44.$

3) $\sqrt{0,81 \cdot 225} = \sqrt{0,81} \cdot \sqrt{225} = 0,9 \cdot 15 = 13,5.$

4) $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}.$ ◄

Пример 2. Найдите значение выражения: 1) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$.

Решение. 1) Заменив произведение корней корнем из произведения, получаем:

$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$

2) Заменив частное корней корнем из дроби, получаем:

$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{24}{150}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$ ◄

Пример 3. Упростите выражение:

1) $\sqrt{a^{14}}$; 3) $\sqrt{m^2n^2}$, если $m \geqslant 0$, $n \leqslant 0$;

2) $\sqrt{9a^6}$, если $a \leqslant 0$; 4) $\sqrt{a^{36}}$.

Решение. 1) По теореме об арифметическом квадратном корне из степени имеем:

$$\sqrt{a^{14}} = |a^7| = \begin{cases} a^7, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a^7, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

2) Имеем: $\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3|$. Поскольку по условию $a \leqslant 0$, то $a^3 \leqslant 0$. Тогда

$$\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3| = -3a^3.$$

3) Имеем: $\sqrt{m^2n^2} = |m| \cdot |n|$. Поскольку по условию $m \geqslant 0$, то $|m| = m$. Поскольку $n \leqslant 0$, то $|n| = -n$. Следовательно, $|m| \cdot |n| = m \cdot (-n) = -mn$.

4) Имеем: $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}|$. Поскольку $a^{18} \geqslant 0$, то $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}| = a^{18}$. ◄

Пример 4. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{37^2 - 12^2}$; 2) $\sqrt{8 \cdot 648}$; 3) $\sqrt{16,9 \cdot 0,4}$.

Решение. 1) Преобразовав подкоренное выражение по формуле разности квадратов, получаем:

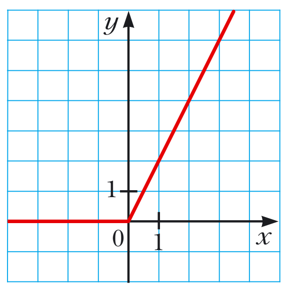
$$\sqrt{37^2-12^2}=\sqrt{(37-12)(37+12)}=\sqrt{25\cdot 49}=5\cdot 7=35.$$

2) Представив подкоренное выражение в виде произведения квадратов рациональных чисел, получаем:

$$\sqrt{8\cdot 648}=\sqrt{8\cdot 2\cdot 324}=\sqrt{16\cdot 324}=4\cdot 18=72.$$

3) $\sqrt{16{,}9\cdot 0{,}4}=\sqrt{169\cdot 0{,}04}=13\cdot 0{,}2=2{,}6.$ ◄

Рис. 33



Пример 5. Постройте график функции $y=\sqrt{x^2}+x$.

Решение. Поскольку $\sqrt{x^2}=|x|$, то $y=|x|+x$.

Если $x\geqslant 0$, то $y=x+x=2x$.

Если $x<0$, то $y=-x+x=0$.

Следовательно, $y=\begin{cases}2x, \text{ если } x\geqslant 0,\\ 0, \text{ если } x<0.\end{cases}$

График функции изображён на рисунке 33. ◄

1. Какому выражению тождественно равно выражение $\sqrt{a^2}$?

2. Сформулируйте теорему об арифметическом квадратном корне из степени.

3. Сформулируйте теорему об арифметическом квадратном корне из произведения.

4. Сформулируйте теорему об арифметическом квадратном корне из дроби.

5. Известно, что неотрицательные числа a_1 и a_2 таковы, что $a_1>a_2$. Сравните значения выражений $\sqrt{a_1}$ и $\sqrt{a_2}$.

Упражнения

496. Чему равно значение выражения:

1) $\sqrt{0{,}4^2}$; 4) $3\sqrt{1{,}2^2}$; 7) $5\sqrt{(-10)^4}$;

2) $\sqrt{(-1{,}8)^2}$; 5) $\sqrt{6^4}$; 8) $-4\sqrt{(-1)^{14}}$;

3) $2\sqrt{(-15)^2}$; 6) $\sqrt{(-2)^{10}}$; 9) $-10\sqrt{3^6}$?

497. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{a^2}$, если $a=4{,}6$; $-18{,}6$;

2) $\sqrt{b^4}$, если $b=-3$; $1{,}2$;

3) $0{,}1\sqrt{c^6}$, если $c=-2$; 5.

498. Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt{9 \cdot 25}$;
2) $\sqrt{16 \cdot 2500}$;
3) $\sqrt{0,64 \cdot 36}$;
4) $\sqrt{400 \cdot 1,44}$;
5) $\sqrt{0,09 \cdot 0,04}$;
6) $\sqrt{6,25 \cdot 0,16}$;
7) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$;
8) $\sqrt{7^2 \cdot 2^8}$;
9) $\sqrt{25 \cdot 64 \cdot 0,36}$;
10) $\sqrt{0,01 \cdot 0,81 \cdot 2500}$;
11) $\sqrt{\dfrac{81}{100}}$;
12) $\sqrt{\dfrac{49}{256}}$;
13) $\sqrt{3\dfrac{13}{36}}$;
14) $\sqrt{3\dfrac{1}{16} \cdot 2\dfrac{14}{25}}$;
15) $\sqrt{\dfrac{169}{36 \cdot 81}}$;
16) $\sqrt{\dfrac{121 \cdot 256}{25 \cdot 100}}$.

499. Чему равно значение выражения:

1) $\sqrt{36 \cdot 81}$;
2) $\sqrt{900 \cdot 49}$;
3) $\sqrt{16 \cdot 0,25}$;
4) $\sqrt{9 \cdot 1,69}$;
5) $\sqrt{0,36 \cdot 1,21}$;
6) $\sqrt{5^2 \cdot 3^6}$;
7) $\sqrt{4^4 \cdot 3^2}$;
8) $\sqrt{2^6 \cdot 5^2}$;
9) $\sqrt{2,25 \cdot 0,04 \cdot 1600}$;
10) $\sqrt{13\dfrac{4}{9}}$;
11) $\sqrt{1\dfrac{7}{9} \cdot \dfrac{4}{25}}$;
12) $\sqrt{\dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{9}{25}}$?

500. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$;
2) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$;
3) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$;
4) $\sqrt{0,009} \cdot \sqrt{1000}$;
5) $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0,18}$;
6) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{26}$;
7) $\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{1\dfrac{2}{3}}$;
8) $\sqrt{\dfrac{2}{11}} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{11}}$;
9) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$.

501. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$;
2) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$;
3) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{12,1}$;
4) $\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{50}$;
5) $\sqrt{1\dfrac{3}{7}} \cdot \sqrt{2,8}$;
6) $\sqrt{5 \cdot 2^3} \cdot \sqrt{5^3 \cdot 2^3}$.

502. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$;
2) $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$;
3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$;
4) $\dfrac{\sqrt{3,2}}{\sqrt{0,2}}$;
5) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$;
6) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}$;
7) $\dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;
8) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}$.

503. Найдите значение выражения:

1) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{\sqrt{6,3}}{\sqrt{0,7}}$; 4) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{242}}$; 5) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

504. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $\sqrt{a^2} = -a$?

505. При каких значениях a и b выполняется равенство:

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$; 2) $\sqrt{ab} = \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$; 3) $\sqrt{-ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{-b}$?

506. Найдите значение выражения, представив предварительно подкоренное выражение в виде произведения квадратов рациональных чисел:

1) $\sqrt{18\cdot 32}$; 4) $\sqrt{75\cdot 48}$; 7) $\sqrt{2,7\cdot 1,2}$;

2) $\sqrt{8\cdot 98}$; 5) $\sqrt{288\cdot 50}$; 8) $\sqrt{80\cdot 45}$;

3) $\sqrt{3,6\cdot 14,4}$; 6) $\sqrt{4,5\cdot 72}$; 9) $\sqrt{33\cdot 297}$.

507. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{18\cdot 200}$; 3) $\sqrt{14,4\cdot 0,9}$; 5) $\sqrt{12,5\cdot 32}$;

2) $\sqrt{3,6\cdot 0,4}$; 4) $\sqrt{13\cdot 52}$; 6) $\sqrt{108\cdot 27}$.

508. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{41^2 - 40^2}$; 3) $\sqrt{8,5^2 - 7,5^2}$; 5) $\sqrt{\frac{155^2 - 134^2}{84}}$;

2) $\sqrt{145^2 - 144^2}$; 4) $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$; 6) $\sqrt{\frac{139^2 - 86^2}{98,5^2 - 45,5^2}}$.

509. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$; 2) $\sqrt{98,5^2 - 97,5^2}$; 3) $\sqrt{\frac{98}{228^2 - 164^2}}$.

510. Замените выражение тождественно равным, не содержащим знака корня:

1) $\sqrt{b^2}$; 2) $-0,4\sqrt{c^2}$; 3) $\sqrt{a^6}$; 4) $\sqrt{m^8}$.

511. Замените выражение тождественно равным, не содержащим знака корня:

1) $1,2\sqrt{x^2}$; 2) $\sqrt{y^4}$; 3) $\sqrt{n^{10}}$.

512. Упростите выражение:

1) $\sqrt{m^2}$, если $m > 0$; 5) $\sqrt{c^{12}}$;

2) $\sqrt{n^2}$, если $n < 0$; 6) $\sqrt{0,25b^{14}}$, если $b \leqslant 0$;

3) $\sqrt{16p^2}$, если $p \geqslant 0$; 7) $\sqrt{81x^4y^2}$, если $y \geqslant 0$;

4) $\sqrt{0,36k^2}$, если $k \leqslant 0$; 8) $\sqrt{0,01a^6b^{10}}$, если $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;

9) $-1{,}2x\sqrt{64x^{18}}$, если $x \leqslant 0$;

10) $\dfrac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^8c^{10}}$, если $b < 0$;

11) $\dfrac{3{,}3a^4}{b^3}\sqrt{\dfrac{b^{24}}{121a^{26}}}$, если $a < 0$;

12) $-0{,}5m^5\sqrt{1{,}96m^6n^8}$, если $m \leqslant 0$.

513. Упростите выражение:

1) $\sqrt{9a^{16}}$;

2) $\sqrt{0{,}81d^6}$, если $d \geqslant 0$;

3) $-5\sqrt{4x^2}$, если $x \leqslant 0$;

4) $-0{,}1\sqrt{100z^{10}}$, если $z \geqslant 0$;

5) $\sqrt{p^6q^8}$, если $p \geqslant 0$;

6) $\sqrt{25m^{34}n^{38}}$, если $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;

7) $ab^2\sqrt{a^4b^{18}c^{22}}$, если $b \geqslant 0$, $c \leqslant 0$;

8) $-\dfrac{8m^3p^4}{k^2}\sqrt{\dfrac{625k^{30}p^{40}}{144m^6}}$, если $m < 0$, $k > 0$.

514. Какие из данных равенств выполняются при всех действительных значениях a:

1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $\sqrt{a^4} = a^2$; 3) $\sqrt{a^6} = a^3$; 4) $\sqrt{a^8} = a^4$?

515. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt{a^{10}} = a^5$;

2) $\sqrt{a^{10}} = -a^5$;

3) $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2$;

4) $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{-a}\right)^2$?

516. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x^2} - x$, если $x \leqslant 0$;

2) $y = 2x + \sqrt{x^2}$;

3) $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$;

4) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}} + 3$.

517. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x^2} - 2x$, если $x \geqslant 0$;

2) $y = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$.

518. При каком значении x выполняется равенство:

1) $\sqrt{x^2} = x - 4$; 2) $\sqrt{x^2} = 6 - x$; 3) $2\sqrt{x^2} = x + 3$?

519. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2} = x + 8$; 2) $\sqrt{x^2} = 6x - 10$.

Упражнения для повторения

520. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{a^2 - 5a}{a^2 - 10a + 25} + \frac{25}{a^2 - 25}\right) : \frac{125 - a^3}{5 + a}$$

при $a = 4{,}5$.

521. Тракторист должен был засеять поле за 8 дней. Однако из-за плохой погоды он засеивал ежедневно на 3 га меньше нормы и поэтому выполнил работу за 10 дней. Какова площадь поля?

522. Число a – чётное, а число b – нечётное. Значением какого из данных выражений обязательно является чётное число:

1) $(a + b)b$; 2) $\frac{ab}{2}$; 3) $\frac{a^2b}{2}$; 4) $\frac{ab^2}{2}$?

Учимся делать нестандартные шаги

523. На доске записаны 102 последовательных натуральных числа. Можно ли разбить их на две группы так, чтобы сумма чисел в каждой группе была простым числом (в каждой группе должно быть не менее двух чисел)?

§ 17. Тождественные преобразования выражений, содержащих арифметические квадратные корни

Пользуясь теоремой об арифметическом квадратном корне из произведения, преобразуем выражение $\sqrt{48}$. Имеем:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Выражение $\sqrt{48}$ мы представили в виде произведения рационального числа 4 и иррационального числа $\sqrt{3}$. Такое преобразование называют ***вынесением множителя из-под знака корня***. В данном случае был вынесен из-под корня множитель 4.

Рассмотрим выполненное преобразование в обратном порядке:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Такое преобразование называют ***внесением множителя под знак корня***. В данном случае был внесён под корень множитель 4.

Пример 1. Вынесите множитель из-под знака корня: 1) $\sqrt{150}$; 2) $\sqrt{72a^8}$; 3) $\sqrt{b^{35}}$; 4) $\sqrt{-b^{35}}$; 5) $\sqrt{a^2b^3}$, если $a < 0$.

Решение. 1) Представим число, стоящее под знаком корня, в виде произведения двух чисел, одно из которых является квадратом рационального числа:

$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}.$$

2) $\sqrt{72a^8} = \sqrt{36a^8 \cdot 2} = 6a^4\sqrt{2}.$

3) Поскольку значение подкоренного выражения должно быть неотрицательным, то из условия следует, что $b \geqslant 0$. Тогда

$\sqrt{b^{35}} = \sqrt{b^{34}b} = |b^{17}|\sqrt{b} = b^{17}\sqrt{b}$.

4) Из условия следует, что $b \leqslant 0$. Тогда

$\sqrt{-b^{35}} = \sqrt{b^{34} \cdot (-b)} = |b^{17}|\sqrt{-b} = -b^{17}\sqrt{-b}$.

5) Из условия следует, что $a^2 > 0$. Поскольку значение подкоренного выражения должно быть неотрицательным, то получаем, что $b \geqslant 0$. Тогда

$\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2b} = |a| \cdot |b|\sqrt{b} = -ab\sqrt{b}$. ◄

Пример 2. Внесите множитель под знак корня: 1) $-2\sqrt{7}$; 2) $a\sqrt{7}$; 3) $3b\sqrt{-\frac{b}{3}}$; 4) $c\sqrt{c^7}$.

Решение. 1) $-2\sqrt{7} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{28}$.

2) Если $a \geqslant 0$, то $a\sqrt{7} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$; если $a < 0$, то $a\sqrt{7} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{7a^2}$.

3) Из условия следует, что $b \leqslant 0$. Тогда $3b\sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2} \cdot \sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt{-3b^3}$.

4) Из условия следует, что $c \geqslant 0$. Тогда $c\sqrt{c^7} = \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{c^7} = \sqrt{c^9}$. ◄

Пример 3. Упростите выражение: 1) $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a}$; 2) $(3 + 2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$; 3) $(7 - 3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10} + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{5})$.

Решение. 1) Имеем: $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a} = \sqrt{9 \cdot 6a} + \sqrt{4 \cdot 6a} - \sqrt{100 \cdot 6a} = 3\sqrt{6a} + 2\sqrt{6a} - 10\sqrt{6a} = \sqrt{6a}(3 + 2 - 10) = \sqrt{6a} \cdot (-5) = -5\sqrt{6a}$.

2) $(3 + 2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^2 = 6 + \sqrt{3} - 6 = \sqrt{3}$.

3) Применив формулы сокращённого умножения (квадрат двучлена и произведение суммы и разности двух выражений), получаем:

$(7 - 3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10} + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{5}) = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 - \left((\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2\right) = 49 - 42\sqrt{2} + 18 - (10 - 5) = 62 - 42\sqrt{2}$. ◄

Пример 4. Разложите на множители выражение: 1) $a^2 - 2$; 2) $b - 4$, если $b \geqslant 0$; 3) $9c - 6\sqrt{5c} + 5$; 4) $a + \sqrt{a}$; 5) $\sqrt{3} + 6$; 6) $\sqrt{35} - \sqrt{15}$.

Решение. 1) Представив данное выражение в виде разности квадратов, получаем:

$a^2 - 2 = a^2 - (\sqrt{2})^2 = (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})$.

2) Поскольку по условию $b \geqslant 0$, то $b - 4 = \left(\sqrt{b}\right)^2 - 4 = \left(\sqrt{b} - 2\right)\left(\sqrt{b} + 2\right)$.

3) Применим формулу квадрата разности:

$9c - 6\sqrt{5c} + 5 = \left(3\sqrt{c}\right)^2 - 2 \cdot 3\sqrt{c} \cdot \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(3\sqrt{c} - \sqrt{5}\right)^2$.

4) Имеем: $a + \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \sqrt{a} = \sqrt{a}\left(\sqrt{a} + 1\right)$.

5) $\sqrt{3} + 6 = \sqrt{3} + 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3}\left(1 + 2\sqrt{3}\right)$.

6) $\sqrt{35} - \sqrt{15} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5}\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)$. ◄

Пример 5. Сократите дробь: 1) $\dfrac{b - 1}{\sqrt{b} + 1}$; 2) $\dfrac{2 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{a - b}{a - 2\sqrt{ab} + b}$, если $a > 0$, $b > 0$.

Решение. 1) Разложив числитель данной дроби на множители, получаем:

$$\frac{b - 1}{\sqrt{b} + 1} = \frac{\left(\sqrt{b}\right)^2 - 1}{\sqrt{b} + 1} = \frac{\left(\sqrt{b} - 1\right)\left(\sqrt{b} + 1\right)}{\sqrt{b} + 1} = \sqrt{b} - 1.$$

2) $\dfrac{2 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 3\right)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 3.$

3) Поскольку по условию $a > 0$ и $b > 0$, то числитель и знаменатель данной дроби можно разложить на множители и полученную дробь сократить:

$$\frac{a - b}{a - 2\sqrt{ab} + b} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}. \text{ ◄}$$

Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби означает преобразовать дробь так, чтобы её знаменатель не содержал квадратного корня.

Пример 6. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{15}{2\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{14}{5\sqrt{2} - 1}$.

Решение. 1) Умножив числитель и знаменатель данной дроби на $\sqrt{3}$, получаем:

$$\frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

2) Умножив числитель и знаменатель данной дроби на выражение $5\sqrt{2} + 1$, получаем:

$$\frac{14}{5\sqrt{2} - 1} = \frac{14\left(5\sqrt{2} + 1\right)}{\left(5\sqrt{2} - 1\right)\left(5\sqrt{2} + 1\right)} = \frac{14\left(5\sqrt{2} + 1\right)}{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 1} =$$

$$= \frac{14\left(5\sqrt{2} + 1\right)}{50 - 1} = \frac{14\left(5\sqrt{2} + 1\right)}{49} = \frac{2\left(5\sqrt{2} + 1\right)}{7} = \frac{10\sqrt{2} + 2}{7}. \text{ ◄}$$

Пример 7. Докажите тождество

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Решение. $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$

$$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{a-b}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\frac{\left(a+2\sqrt{ab}+b\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.\ ◀$$

Пример 8. Упростите выражение $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$.

Решение. Представив подкоренное выражение в виде квадрата суммы, получаем:

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}}=\sqrt{9+2\cdot3\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}=3+\sqrt{3}.\ ◀$$

Упражнения

524. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{8}$; 4) $\sqrt{54}$; 7) $\sqrt{275}$; 10) $\sqrt{0,48}$;
2) $\sqrt{12}$; 5) $\sqrt{490}$; 8) $\sqrt{108}$; 11) $\sqrt{450}$;
3) $\sqrt{32}$; 6) $\sqrt{500}$; 9) $\sqrt{0,72}$; 12) $\sqrt{36\,300}$.

525. Упростите выражение:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 3) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$;
2) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; 4) $-0,05\sqrt{4400}$.

526. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{27}$; 4) $\sqrt{125}$; 7) $-2\sqrt{0,18}$; 10) $\frac{3}{7}\sqrt{98}$;
2) $\sqrt{24}$; 5) $\frac{1}{8}\sqrt{96}$; 8) $\frac{4}{9}\sqrt{63}$; 11) $10\sqrt{0,03}$;
3) $\sqrt{20}$; 6) $0,4\sqrt{250}$; 9) $0,8\sqrt{1250}$; 12) $0,7\sqrt{1000}$.

527. Внесите множитель под знак корня:

1) $7\sqrt{2}$; 4) $-10\sqrt{14}$; 7) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$; 10) $-0,3\sqrt{10b}$;

2) $3\sqrt{13}$; 5) $5\sqrt{8}$; 8) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$; 11) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$;

3) $-2\sqrt{17}$; 6) $6\sqrt{a}$; 9) $\frac{1}{8}\sqrt{128a}$; 12) $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{28}}$.

528. Внесите множитель под знак корня:

1) $2\sqrt{6}$; 3) $-11\sqrt{3}$; 5) $-7\sqrt{3c}$; 7) $8\sqrt{\frac{n}{8}}$;

2) $9\sqrt{2}$; 4) $12\sqrt{b}$; 6) $-10\sqrt{0,7m}$; 8) $-\frac{1}{3}\sqrt{18p}$.

529. Упростите выражение:

1) $4\sqrt{a}+3\sqrt{a}-5\sqrt{a}$; 3) $5\sqrt{c}+3\sqrt{d}-\sqrt{c}+3\sqrt{d}$;

2) $6\sqrt{b}+2\sqrt{b}-8\sqrt{b}$; 4) $\sqrt{5}+7\sqrt{5}-4\sqrt{5}$.

530. Упростите выражение:

1) $3\sqrt{a}-2\sqrt{a}$; 2) $\sqrt{c}+10\sqrt{c}-14\sqrt{c}$; 3) $9\sqrt{6}-2\sqrt{3}+8\sqrt{3}-3\sqrt{6}$.

531. Упростите выражение:

1) $\sqrt{9a}+\sqrt{25a}-\sqrt{49a}$; 3) $2\sqrt{0,04c}-0,3\sqrt{16c}+\frac{1}{3}\sqrt{0,81c}$;

2) $\sqrt{64b}-\frac{1}{6}\sqrt{36b}$; 4) $0,4\sqrt{100m}+15\sqrt{\frac{4}{9}m}-1,2\sqrt{2,25m}$.

532. Упростите выражение:

1) $2\sqrt{4x}+6\sqrt{16x}-\sqrt{625x}$; 2) $3\sqrt{0,09y}-0,6\sqrt{144y}+\frac{18}{11}\sqrt{\frac{121}{36}y}$.

533. Упростите выражение:

1) $8\sqrt{2}-\sqrt{32}$; 4) $2\sqrt{500}-8\sqrt{5}$;

2) $6\sqrt{3}-\sqrt{27}$; 5) $5\sqrt{7}-\sqrt{700}-0,5\sqrt{28}$;

3) $\sqrt{96}-3\sqrt{6}$; 6) $2\sqrt{20}-\frac{1}{3}\sqrt{45}-0,6\sqrt{125}$.

534. Рациональным или иррациональным является значение выражения:

1) $\sqrt{48}-6-4\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{162}-9\sqrt{2}+\sqrt{27}$?

535. Упростите выражение:

1) $4\sqrt{700}-27\sqrt{7}$; 4) $5\sqrt{12}-7\sqrt{3}$;

2) $\sqrt{75}-6\sqrt{3}$; 5) $3\sqrt{72}-4\sqrt{2}+2\sqrt{98}$;

3) $2\sqrt{50}-8\sqrt{2}$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt{108}+\sqrt{363}-\frac{2}{9}\sqrt{243}$.

536. Упростите выражение:

1) $\sqrt{2}\left(\sqrt{50}+\sqrt{8}\right)$;
2) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{3}$;
3) $\left(3\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{5}$;
4) $2\sqrt{2}\left(3\sqrt{18}-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\sqrt{32}\right)$.

537. Упростите выражение:

1) $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-\sqrt{28}\right)$;
2) $\left(\sqrt{18}+\sqrt{72}\right)\cdot\sqrt{2}$;
3) $\left(4\sqrt{3}-\sqrt{75}+4\right)\cdot 3\sqrt{3}$;
4) $\left(\sqrt{600}+\sqrt{6}-\sqrt{24}\right)\cdot\sqrt{6}$.

538. Выполните умножение:

1) $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$;
2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$;
3) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)$;
4) $\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$;
5) $\left(4+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)$;
6) $\left(y-\sqrt{7}\right)\left(y+\sqrt{7}\right)$;
7) $\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)$;
8) $\left(m+\sqrt{n}\right)^2$;
9) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$;
10) $\left(2-3\sqrt{3}\right)^2$.

539. Выполните умножение:

1) $\left(\sqrt{7}+3\right)\left(3\sqrt{7}-1\right)$;
2) $\left(4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)$;
3) $\left(\sqrt{p}-q\right)\left(\sqrt{p}+q\right)$;
4) $\left(6-\sqrt{13}\right)\left(6+\sqrt{13}\right)$;
5) $\left(\sqrt{5}-x\right)\left(\sqrt{5}+x\right)$;
6) $\left(\sqrt{19}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{19}-\sqrt{17}\right)$;
7) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2$;
8) $\left(3-2\sqrt{15}\right)^2$.

540. Чему равно значение выражения:

1) $\left(2+\sqrt{7}\right)^2-4\sqrt{7}$;
2) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2+6\sqrt{2}$?

541. Найдите значение выражения:

1) $\left(3+\sqrt{5}\right)^2-6\sqrt{5}$;
2) $\left(\sqrt{12}-2\sqrt{2}\right)^2+8\sqrt{6}$.

542. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{4}{\sqrt{2}}$;
2) $\frac{12}{\sqrt{6}}$;
3) $\frac{18}{\sqrt{5}}$;
4) $\frac{m}{\sqrt{n}}$;
5) $\frac{a}{b\sqrt{b}}$;
6) $\frac{5}{\sqrt{15}}$;
7) $\frac{7}{\sqrt{7}}$;
8) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$.

543. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{a}{\sqrt{11}}$;
2) $\frac{18}{\sqrt{6}}$;
3) $\frac{5}{\sqrt{10}}$;
4) $\frac{13}{\sqrt{26}}$;
5) $\frac{30}{\sqrt{15}}$;
6) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$.

544. Разложите на множители выражение:

1) a^2-3;
2) $4b^2-2$;

3) $5-6c^2$;

4) $a-9$, если $a \geqslant 0$;

5) $m-n$, если $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;

6) $16x-25y$, если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

7) $a-2\sqrt{a}+1$;

8) $4m-28\sqrt{mn}+49n$, если $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;

9) $b+6\sqrt{b}+9$;

10) $3+2\sqrt{3c}+c$;

11) $2+\sqrt{2}$;

12) $6\sqrt{7}-7$;

13) $a-\sqrt{a}$;

14) $\sqrt{b}+\sqrt{3b}$;

15) $\sqrt{15}-\sqrt{5}$.

545. Разложите на множители выражение:

1) $15-x^2$;

2) $49x^2-2$;

3) $36p-64q$, если $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$;

4) $c-100$, если $c \geqslant 0$;

5) $a-8b\sqrt{a}+16b^2$;

6) $m+2\sqrt{mn}+n$, если $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;

7) $a-4\sqrt{a}+4$;

8) $5+\sqrt{5}$;

9) $\sqrt{3p}-p$;

10) $\sqrt{12}+\sqrt{32}$.

546. Сократите дробь:

1) $\frac{a^2-7}{a+\sqrt{7}}$;

2) $\frac{\sqrt{3}-b}{3-b^2}$;

3) $\frac{c-9}{\sqrt{c}-3}$;

4) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

5) $\frac{5\sqrt{a}-7\sqrt{b}}{25a-49b}$;

6) $\frac{100a^2-9b}{10a+3\sqrt{b}}$;

7) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$;

8) $\frac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$;

9) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{5-\sqrt{10}}$;

10) $\frac{13-\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$;

11) $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

12) $\frac{4b^2-4b\sqrt{c}+c}{2b-\sqrt{c}}$.

547. Сократите дробь:

1) $\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$;

2) $\frac{\sqrt{a}+2}{a-4}$;

3) $\frac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$;

4) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$;

5) $\frac{23-\sqrt{23}}{\sqrt{23}}$;

6) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{28}}{\sqrt{54}-\sqrt{63}}$;

7) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-2\sqrt{ab}+b}$;

8) $\frac{b-8\sqrt{b}+16}{\sqrt{b}-4}$.

548. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{3a^2}$, если $a \geqslant 0$;

2) $\sqrt{5b^2}$, если $b \leqslant 0$;

3) $\sqrt{12a^4}$;

4) $\sqrt{c^5}$.

549. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{18x^{12}}$; 2) $\sqrt{y^9}$.

550. Упростите выражение:

1) $\sqrt{98}-\sqrt{50}+\sqrt{32}$;

2) $3\sqrt{8}+\sqrt{128}-\frac{1}{3}\sqrt{162}$;

3) $0{,}7\sqrt{300}-7\sqrt{\frac{3}{49}}+\frac{2}{3}\sqrt{108}$;

4) $\sqrt{5a}-2\sqrt{20a}+3\sqrt{80a}$;

5) $\sqrt{a^3b}-\frac{2}{a}\sqrt{a^5b}$, если $a>0$;

6) $\sqrt{c^5}+4c\sqrt{c^3}-5c^2\sqrt{c}$.

551. Упростите выражение:

1) $0{,}5\sqrt{12}-3\sqrt{27}+0{,}4\sqrt{75}$;

2) $2{,}5\sqrt{28b}+\frac{2}{3}\sqrt{63b}-10\sqrt{0{,}07b}$;

3) $\sqrt{81a^7}-5a^3\sqrt{a}+\frac{6}{a}\sqrt{a^9}$.

552. Докажите, что:

1) $\sqrt{11+4\sqrt{7}}=\sqrt{7}+2$;

2) $\sqrt{14+8\sqrt{3}}=\sqrt{8}+\sqrt{6}$.

553. Упростите выражение:

1) $(2\sqrt{3}-1)(\sqrt{27}+2)$;

2) $(\sqrt{5}-2)^2-(3+\sqrt{5})^2$;

3) $\sqrt{\sqrt{17}-4}\cdot\sqrt{\sqrt{17}+4}$;

4) $(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2$;

5) $\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$.

554. Найдите значение выражения:

1) $(3\sqrt{2}+1)(\sqrt{8}-2)$;

2) $(3-2\sqrt{7})^2+(3+2\sqrt{7})^2$;

3) $(10-4\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^2$;

4) $\left(\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}\right)^2$.

555. Сократите дробь:

1) $\frac{4a+4\sqrt{5}}{a^2-5}$;

2) $\frac{\sqrt{28}-2\sqrt{2a}}{6a-21}$;

3) $\frac{a+4\sqrt{ab}+4b}{a-4b}$, если $a>0$, $b>0$;

4) $\frac{x^2-6y}{x^2+6y-x\sqrt{24y}}$;

5) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}$;

6) $\frac{m\sqrt{m}-27}{\sqrt{m}-3}$.

556. Сократите дробь:

1) $\frac{a-b}{\sqrt{11b}-\sqrt{11a}}$;

2) $\frac{2a+10\sqrt{2ab}+25b}{6a-75b}$, если $a>0$, $b>0$;

3) $\frac{a-2\sqrt{a}+4}{a\sqrt{a}+8}$.

557. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$; 3) $\frac{15}{\sqrt{15}-\sqrt{12}}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

2) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; 4) $\frac{19}{2\sqrt{5}-1}$; 6) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

558. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$; 2) $\frac{8}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$; 3) $\frac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 4) $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

559. Докажите равенство:

1) $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}+\frac{1}{5+2\sqrt{6}}=10$; 3) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=4\sqrt{2}$.

2) $\frac{2}{3\sqrt{2}+4}-\frac{2}{3\sqrt{2}-4}=-8$;

560. Докажите, что значением выражения является рациональное число:

1) $\frac{6}{3+2\sqrt{3}}+\frac{6}{3-2\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{11}-\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$.

561. Упростите выражение:

1) $\frac{a}{\sqrt{a}-2}-\frac{4\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2}$;

2) $\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-2}-\frac{\sqrt{m}+3}{\sqrt{m}}$;

3) $\frac{\sqrt{y}+4}{\sqrt{xy}+y}-\frac{\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{xy}}$;

4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}-\frac{a}{a-16}$;

5) $\frac{a}{\sqrt{ab}-b}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$;

6) $\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{a}+2}$;

7) $\frac{\sqrt{c}-5}{\sqrt{c}}:\frac{c-25}{3c}$;

8) $\left(\sqrt{a}-\frac{a}{\sqrt{a}+1}\right):\frac{\sqrt{a}}{a-1}$;

9) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

10) $\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}+\frac{12\sqrt{x}}{x-9}\right):\frac{\sqrt{x}+3}{x-3\sqrt{x}}$.

562. Упростите выражение:

1) $\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}$;

2) $\frac{\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{ab}-b}$;

3) $\frac{\sqrt{x}}{y-2\sqrt{y}}:\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}-6}$;

4) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}:\left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)$;

5) $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{4\sqrt{x}}{x-1}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

6) $\frac{a-64}{\sqrt{a}+3}\cdot\frac{1}{a+8\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}+8}{a-3\sqrt{a}}$.

563. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{-m^9}$;
2) $\sqrt{a^4b^{13}}$, если $a \neq 0$;
3) $\sqrt{4x^6y}$, если $x < 0$;
4) $\sqrt{m^7n^7}$, если $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;
5) $\sqrt{45x^3y^{14}}$, если $y < 0$;
6) $\sqrt{64a^2b^9}$, если $a > 0$;
7) $\sqrt{242m^{11}b^{18}}$, если $b < 0$;
8) $\sqrt{-m^2n^2p^{15}}$, если $m > 0$, $n < 0$.

564. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{-m^{19}}$;
2) $\sqrt{a^{23}b^{24}}$, если $b \neq 0$;
3) $\sqrt{49a^2b}$, если $a < 0$;
4) $\sqrt{a^9b^9}$;
5) $\sqrt{27x^{15}y^{34}}$, если $y < 0$;
6) $\sqrt{-50m^6n^6p^7}$, если $m > 0$, $n > 0$.

565. Внесите множитель под знак корня:

1) $a\sqrt{3}$;
2) $b\sqrt{-b}$;
3) $c\sqrt{c^5}$;
4) $m\sqrt{n}$, если $m \geqslant 0$;
5) $xy^2\sqrt{xy}$, если $x \leqslant 0$;
6) $2p\sqrt{\dfrac{p}{2}}$;
7) $2p\sqrt{-\dfrac{p}{2}}$;
8) $ab^2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, если $a \geqslant 0$.

566. Внесите множитель под знак корня:

1) $m\sqrt{7}$, если $m \geqslant 0$;
2) $3n\sqrt{6}$, если $n \leqslant 0$;
3) $p\sqrt{p^3}$;
4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, если $y \leqslant 0$;
5) $7a\sqrt{\dfrac{3}{a}}$;
6) $5ab\sqrt{-\dfrac{a^7}{5b}}$, если $a \leqslant 0$, $b > 0$.

567. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+7} - \dfrac{15\sqrt{a}}{a+14\sqrt{a}+49}\right) : \dfrac{8\sqrt{a}+41}{a-49} + \dfrac{7\sqrt{a}-49}{\sqrt{a}+7} = \sqrt{a}-7$;

2) $\dfrac{a\sqrt{a}+27}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{a}-3}{a-3\sqrt{a}+9} - \dfrac{\sqrt{ab}-9}{a\sqrt{a}+27}\right) = \sqrt{a}$.

568. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}} - \dfrac{1}{a-b} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}$;

2) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b} - \dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)$.

569. Упростите выражение:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$.

570. Упростите выражение:

1) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$; 2) $\sqrt{15+6\sqrt{6}}$; 3) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$.

571. Упростите выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

572. Докажите, что:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{91}+\sqrt{89}}=\frac{\sqrt{91}-1}{2}.$$

573. Докажите, что:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2.$$

574. Упростите выражение:

1) $\sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$;

2) $\sqrt{22+6\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

Упражнения для повторения

575. Рабочий должен был изготовлять ежедневно по 12 деталей. Однако он изготовлял ежедневно по 15 деталей, и уже за 5 дней до окончания срока работы ему осталось изготовить 30 деталей. Сколько деталей должен был изготовить рабочий?

576. При распродаже цену на товар снизили на 20 %. На сколько процентов нужно повысить цену на товар, чтобы она стала равна первоначальной?

577. Лодка проплыла 32 км по течению реки за 4 ч, а против течения — за 8 ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.

578. Федя и Оля ехали в одном поезде. Федя сел в двенадцатый вагон от головы поезда, а Оля — в шестой вагон от хвоста поезда. Оказалось, что они едут в одном вагоне. Сколько вагонов в поезде?

579. Число a — положительное, а число b — отрицательное. Какое из данных выражений принимает наибольшее значение:

1) a^2b; 2) $-a^2b^2$; 3) $-ab^2$; 4) ab; 5) $-a^2b$?

Учимся делать нестандартные шаги

580. Известно, что в некотором классе без двоек учатся не менее 95,5 % и не более 96,5 % учеников. Какое наименьшее количество учеников может быть в этом классе?

§ 18. Функция $y = \sqrt{x}$ и её график

Если площадь квадрата равна x, то его сторону y можно найти по формуле $y = \sqrt{x}$. Изменение площади x квадрата приводит и к изменению его стороны y.

Каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y. Следовательно, зависимость переменной y от переменной x является функциональной, а формула $y = \sqrt{x}$ задаёт функцию.

Поскольку в выражении $\sqrt{x}$ допустимыми значениями переменной x являются все неотрицательные числа, то областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является множество неотрицательных чисел.

Выражение $\sqrt{x}$ не может принимать отрицательные значения, то есть ни одно отрицательное число не может принадлежать области значений рассматриваемой функции. Покажем, что функция $y = \sqrt{x}$ может принимать любые неотрицательные значения, например 7,2. Действительно, существует такое значение аргумента x, что $\sqrt{x} = 7{,}2$. Это значение равно $7{,}2^2$. На этом примере мы видим, что для любого неотрицательного числа b всегда найдётся такое значение x, что $\sqrt{x} = b$. Таким значением аргумента x является число b^2.

Теперь можно сделать такой вывод: областью значений функции $y = \sqrt{x}$ является множество неотрицательных чисел.

Заметим, что если $x = 0$, то $y = 0$.

Учитывая область определения и область значений функции $y = \sqrt{x}$, можно сделать вывод, что её график расположен в первой координатной четверти.

В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции $y = \sqrt{x}$.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Отметим на координатной плоскости точки, координаты (x; y) которых указаны в таблице (рис. 34).

Чем больше отметить точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \sqrt{x}$, тем меньше полученная фигура будет отличаться от графика функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 35).

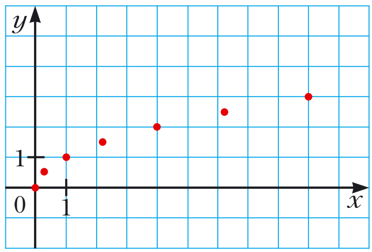


Рис. 34

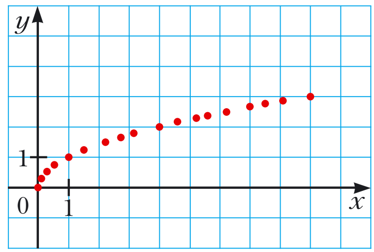


Рис. 35

Если бы удалось на координатной плоскости отметить все такие точки, то получили бы фигуру, изображённую на рисунке 36. В старших классах будет доказано, что графиком функции $y = \sqrt{x}$ является фигура, равная ветви параболы $y = x^2$.

Пусть x_1 и x_2 — два произвольных значения аргумента функции $y = \sqrt{x}$ такие, что $x_1 < x_2$. Тогда из свойства арифметического квадратного корня следует, что $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Это означает, что большему значению аргумента функции $y = \sqrt{x}$ соответствует большее значение функции. Верно и обратное утверждение: большему значению функции соответствует большее значение аргумента, то есть если $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, то $x_1 < x_2$ (рис. 37).

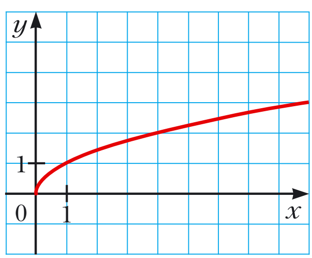


Рис. 36

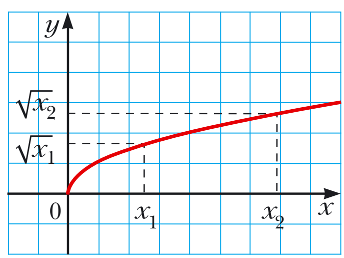


Рис. 37

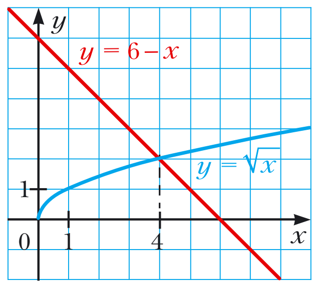
В таблице приведены свойства функции $y = \sqrt{x}$, изученные в этом параграфе.

Область определения	Множество неотрицательных чисел
Область значений	Множество неотрицательных чисел
График	Ветвь параболы
Нуль функции (значение аргумента, при котором значение функции равно 0)	$x = 0$
Сравнение значений функции	Большему значению аргумента соответствует большее значение функции

Пример 1. Решите графически уравнение $\sqrt{x} = 6 - x$.

Решение. В одной системе координат построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 6 - x$ (рис. 38). Эти графики пересекаются в точке, абсцисса которой равна 4. Проверка подтверждает, что число 4 является корнем данного уравнения. ◂

Рис. 38



Пример 2. Сравните числа: 1) 6 и $\sqrt{31}$; 2) $3\sqrt{7}$ и $\sqrt{65}$.

Решение. 1) Поскольку $6 = \sqrt{36}$ и $36 > 31$, то $\sqrt{36} > \sqrt{31}$, то есть $6 > \sqrt{31}$.

2) Имеем: $3\sqrt{7} = \sqrt{63}$, $63 < 65$, $\sqrt{63} < \sqrt{65}$. Следовательно, $3\sqrt{7} < \sqrt{65}$. ◂

Пример 3. При каких значениях x выполняется неравенство $\sqrt{x} < 3$?

Решение. Запишем данное неравенство так: $\sqrt{x} < \sqrt{9}$. Поскольку большее значение функции $y = \sqrt{x}$ соответствует большему значению аргумента, то можно сделать вывод, что $x < 9$. Учитывая, что выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл только при $x \geqslant 0$, получаем, что данное неравенство выполняется при всех x, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x < 9$. ◂

Пример 4. Упростите выражение $\sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2}$.

Решение. Так как $\sqrt{5} > 2$ и $\sqrt{5} < 3$, то $\sqrt{5} - 2 > 0$ и $\sqrt{5} - 3 < 0$. Отсюда получаем:

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-2| + |\sqrt{5}-3| = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1.$$

Ответ: 1. ◄

1. Какова область определения функции $y = \sqrt{x}$?
2. Какова область значений функции $y = \sqrt{x}$?
3. Чему равен нуль функции $y = \sqrt{x}$?
4. В какой координатной четверти находится график функции $y = \sqrt{x}$?
5. Какая фигура является графиком функции $y = \sqrt{x}$?
6. Неотрицательные числа a и b таковы, что $a > b$. Сравните $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$.
7. Известно, что $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Сравните числа a и b.

Упражнения

581. Функция задана формулой $y = \sqrt{x}$. Заполните таблицу.

x	0,01	4				1600
y			9	11	1,5	

582. Функция задана формулой $y = \sqrt{x}$.
1) Чему равно значение функции, если значение аргумента равно: 0,16; 64; 1,44; 3600?
2) При каком значении аргумента значение функции равно: 0,2; 5; 120; –4?

583. Не выполняя построения, определите, через какие из данных точек проходит график функции $y = \sqrt{x}$:
A (36; 6), B (4; –2), C (0,81; 0,9), D (–1; 1), E (42,25; 6,5).

584. Через какую из данных точек проходит график функции $y = \sqrt{x}$:
1) A (16; 4); 2) B (49; –7); 3) C (3,6; 0,6); 4) D (–36; 6)?

585. Сравните числа:

1) $\sqrt{86}$ и $\sqrt{78}$;
2) $\sqrt{1,4}$ и $\sqrt{1,6}$;
3) 5 и $\sqrt{26}$;
4) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ и 1;
5) –7 и $-\sqrt{48}$;
6) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$;
7) $\sqrt{41}$ и $2\sqrt{10}$;
8) $0,6\sqrt{3\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{1,1}$;
9) $\sqrt{75}$ и $4\sqrt{3}$.

586. Сравните числа:

1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{5}}$; 3) $\sqrt{33}$ и 6; 5) $\sqrt{30}$ и $2\sqrt{7}$;

2) 9 и $\sqrt{82}$; 4) $3\sqrt{5}$ и $\sqrt{42}$; 6) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

587. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графика функции $y = \sqrt{x}$ и прямой:

1) $y = 1$; 2) $y = 0{,}8$; 3) $y = -6$; 4) $y = 500$.

588. Запишите в порядке убывания числа: 8; $\sqrt{62}$; 7,9; $\sqrt{65}$; 8,2.

589. Запишите в порядке возрастания числа: $\sqrt{38}$; 6,1; 6; $\sqrt{35}$; 5,9.

590. Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число:

1) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{7}$; 7) $\sqrt{59}$;

2) $\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{13}$; 8) $-\sqrt{115}$;

3) $\sqrt{5}$; 6) $\sqrt{0{,}98}$; 9) $-\sqrt{76{,}19}$?

591. Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число:

1) $\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{29}$; 5) $-\sqrt{86}$;

2) $\sqrt{19}$; 4) $\sqrt{160}$; 6) $-\sqrt{30{,}5}$?

592. Укажите все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

1) 3 и $\sqrt{68}$; 3) $-\sqrt{31}$ и $-2{,}3$;

2) $\sqrt{7}$ и $\sqrt{77}$; 4) $-\sqrt{42}$ и 2,8.

593. Укажите все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

1) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$ и $\sqrt{90}$; 3) $-\sqrt{145}$ и $-\sqrt{47}$.

594. При каких значениях x выполняется неравенство:

1) $\sqrt{x} \geqslant 2$; 2) $\sqrt{x} < 4$; 3) $6 \leqslant \sqrt{x} < 9$?

595. При каких значениях x выполняется неравенство:

1) $\sqrt{x} \leqslant 8$; 2) $\sqrt{x} > 7$; 3) $10 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 20$?

596. Решите графически уравнение:

1) $\sqrt{x} = x$; 3) $\sqrt{x} = x + 2$; 5) $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$;

2) $\sqrt{x} = x^2$; 4) $\sqrt{x} = 0{,}5x + 0{,}5$; 6) $\sqrt{x} = 1{,}5 - 0{,}5x$.

597. Решите графически уравнение:

1) $\sqrt{x} = -x - 1$; 2) $\sqrt{x} = 2 - x$; 3) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$.

598. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; 3) $\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$.

599. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$.

600. Решите уравнение $\sqrt{x}=-x^2$.

601. Дана функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, \text{ если } x<0,\\ \sqrt{x}, \text{ если } x\geqslant 0.\end{cases}$

1) Найдите: $f(-8)$, $f(0)$, $f(9)$.
2) Постройте график данной функции.

602. Дана функция $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ если } x\leqslant 1,\\ \sqrt{x}, \text{ если } x>1.\end{cases}$

1) Найдите: $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.
2) Постройте график данной функции.

603. Найдите область определения, область значений и нули функции $y=\sqrt{-x}$. Постройте график данной функции.

604. Постройте график функции $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$.

605. Упростите выражение:

1) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$;

2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$.

606. Упростите выражение:

1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$; 3) $\sqrt{37-20\sqrt{3}}$.

607. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x}=a-x$ в зависимости от значения a?

608. Упростите выражение $\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2-4\sqrt{a}}+\sqrt{(\sqrt{a}-2)^2+8\sqrt{a}}$.

609. Упростите выражение $\sqrt{(\sqrt{a}-6)^2+24\sqrt{a}}-\sqrt{(\sqrt{a}+6)^2-24\sqrt{a}}$.

Упражнения для повторения

610. В одном контейнере было 90 кг яблок, а в другом — 75 кг. После того как из первого контейнера взяли в 3 раза больше яблок, чем из второго, в первом осталось в 2 раза меньше яблок, чем во втором. Сколько килограммов яблок взяли из первого контейнера?

611. От пристани против течения реки отплыла моторная лодка, собственная скорость которой равна 12 км/ч. Через 40 мин после отправления лодки вышел из строя мотор, и лодку течением реки через 2 ч принесло к пристани. Какова скорость течения реки?

612. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{a-2b}{a^2+2ab}-\dfrac{1}{a^2-4b^2}:\dfrac{a+2b}{(2b-a)^2}\right):\dfrac{a^2-2ab}{a^2+4ab+4b^2}=\dfrac{2b}{a^2}$;

2) $\left(\dfrac{2a}{a+3}-\dfrac{4a}{a^2+6a+9}\right)\cdot\dfrac{a^2-9}{a+1}-\dfrac{a^2-9a}{a+3}=a.$

613. Расстояние между двумя городами легковая машина проезжает за 2 ч, а грузовая — за 3 ч. Через какое время после начала движения они встретятся, если выедут одновременно навстречу друг другу из этих городов?

Готовимся к изучению новой темы

614. Решите уравнение:

1) $x^2 = 0$;
2) $x^2 - 1 = 0$;
3) $x^2 + 5x = 0$;
4) $-3x^2 + 12 = 0$;
5) $5x^2 - 6x = 0$;
6) $0{,}2x^2 + 2 = 0$;
7) $\dfrac{1}{6}x^2 - 5x = 0$;
8) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
9) $9x^2 + 30x + 25 = 0$.

Учимся делать нестандартные шаги

615. Натуральные числа от 1 до 37 записаны в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится нацело на следующее за ними число. Какое число записано на третьем месте, если на первом месте записано число 37, а на втором — 1?

Когда сделаны уроки

Разность множеств

В § 14 вы изучили некоторые операции над множествами. Ознакомимся с ещё одной операцией.

Если из множества $\boldsymbol{Z}$ исключить множество $\boldsymbol{N}$, то получим множество целых неположительных чисел. Оно состоит из всех элементов множества $\boldsymbol{Z}$, которые не принадлежат множеству $\boldsymbol{N}$. Говорят, что множество целых неположительных чисел является разностью множеств $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{N}$.

Определение

Разностью множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству $\boldsymbol{A}$, но не принадлежащих множеству $\boldsymbol{B}$.

Разность множеств A и B обозначают так: $A \setminus B$.

Заметим, что для любого множества A выполняется равенство $A \setminus \varnothing = A$.

Из определения разности двух множеств следует, что *если* $A \subset B$, *то* $A \setminus B = \varnothing$, в частности, *если* $B = A$, *то* $A \setminus A = \varnothing$.

Разность множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера. На рисунке 39 заштрихованная фигура изображает множество $A \setminus B$.

В случае, когда множество B является подмножеством множества A, разность $A \setminus B$ называют дополнением множества B в множестве A. На рисунке 39, *б* это множество изображено штриховкой. Например, дополнением множества нечётных чисел в множестве натуральных чисел является множество чётных чисел.

Рис. 39

а *б*

Кубический корень

Вы знаете, что квадрат числа — это частный случай более общего понятия «n-я степень числа». Понятие квадратного корня также можно обобщить, введя определение корня n-й степени. Это будет сделано в 10 классе. Здесь же коротко ознакомимся с понятием **кубический корень**.

Определение

Кубическим корнем из числа a называют число, куб которого равен a.

Кубический корень из числа a обозначают $\sqrt[3]{a}$.

Например,

$\sqrt[3]{8} = 2$, так как $2^3 = 8$;

$\sqrt[3]{125} = 5$, так как $5^3 = 125$;

$\sqrt[3]{0} = 0$, так как $0^3 = 0$;

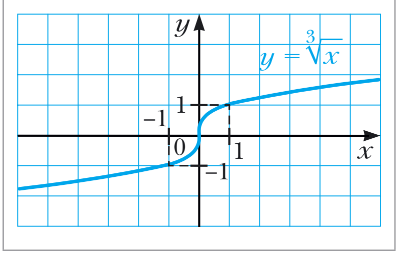
$\sqrt[3]{-27} = -3$, так как $(-3)^3 = -27$.

Если объём куба равен x, то его ребро y можно найти по формуле $y = \sqrt[3]{x}$. Изменение объёма x куба приводит и к изменению его ребра y.

Каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y. Следовательно, зависимость переменной y от переменной x является функциональной, а формула $y = \sqrt[3]{x}$ задаёт функцию, областью определения и областью значений которой является множество $\boldsymbol{R}$.

График функции $y = \sqrt[3]{x}$ изображён на рисунке 40.

Рис. 40



Задание № 4 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Какое из данных утверждений неверно?

А) -5 — целое число
Б) -5 — рациональное число
В) -5 — иррациональное число
Г) -5 — действительное число

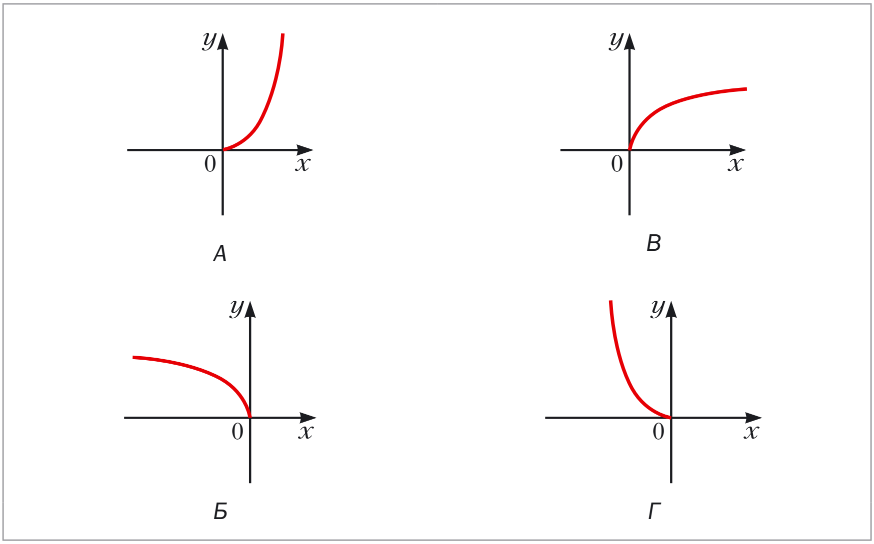
2. Какое из чисел является иррациональным?

А) $\sqrt{4}$ Б) $\sqrt{0{,}4}$ В) $\sqrt{0{,}04}$ Г) $\sqrt{400}$

3. Графиком какой из функций является парабола?

А) $y = 2x$ Б) $y = x^2$ В) $y = \dfrac{2}{x}$ Г) $y = \dfrac{x}{2}$

4. На каком из рисунков изображён график функции $y = \sqrt{x}$?



5. Какое из данных выражений не имеет смысла?

А) $\sqrt{2}$ Б) $-\sqrt{2}$ В) $\sqrt{-2}$ Г) $\sqrt{(-2)^2}$

6. Вычислите значение выражения $\sqrt{7x - 3}$ при $x = 4$.

А) 5 Б) -5 В) 25 Г) -25

7. Чему равно значение выражения $\sqrt{36 \cdot 0{,}81}$?

А) 6,9 Б) 54 В) 5,4 Г) 0,54

8. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{1}{5}\sqrt{10}\right)^2$.

А) 2 Б) 4 В) 2,5 Г) 0,4

9. Упростите выражение $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{64a}$.

А) $15\sqrt{a}$ Б) $15a$ В) $7\sqrt{a}$ Г) $7a$

10. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{12}{\sqrt{2}}$.

А) $\sqrt{2}$ Б) $4\sqrt{2}$ В) $6\sqrt{2}$ Г) $10\sqrt{2}$

11. Сократите дробь $\frac{a-2}{a-2\sqrt{2a}+2}$.

А) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$ Б) $\frac{a+2}{a-2}$ В) 1 Г) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$

12. Упростите выражение $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})+(\sqrt{5}+1)^2-\sqrt{20}$.

А) 15 Б) 5 В) $10-\sqrt{5}$ Г) $10+5\sqrt{5}$

Итоги главы 2

Свойства функции $y = x^2$

Область определения: R.
Область значений: множество неотрицательных чисел.
График: парабола.
Нуль функции: $x = 0$.
Свойство графика: ось ординат является осью симметрии параболы.

Квадратный корень

Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень

Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Равные множества

Два множества A и B называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть каждый элемент множества A принадлежит множеству B и наоборот — каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

Подмножество

Множество B называют подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Пересечение множеств

Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B.

Объединение множеств

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B.

Действительные числа

Множеством действительных чисел называют объединение множеств рациональных и иррациональных чисел.

Обозначения числовых множеств

N — множество натуральных чисел;
Z — множество целых чисел;
Q — множество рациональных чисел;
R — множество действительных чисел.

Связь между числовыми множествами

$N \subset Z \subset Q \subset R$.

Свойства арифметического квадратного корня

Для любого действительного числа a выполняется равенство $\sqrt{a^2} = |a|$.

Для любого действительного числа a и любого натурального числа n выполняется равенство $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$.

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b > 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Для любых неотрицательных чисел a_1 и a_2 таких, что $a_1 > a_2$, выполняется неравенство $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.

Свойства функции $y = \sqrt{x}$

Область определения: множество неотрицательных чисел.
Область значений: множество неотрицательных чисел.
График: ветвь параболы.
Нуль функции: $x = 0$.
Большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Глава 3. Квадратные уравнения

Изучив материал этой главы, вы научитесь решать уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$.

Изучите теорему Виета для квадратного уравнения.

Овладеете приёмами решения уравнений, сводящихся к квадратным.

§ 19. Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений

Вы умеете решать линейные уравнения, то есть уравнения вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа.

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ называют **уравнением первой степени**.

Например, каждое из линейных уравнений $2x = 3$, $3x = 0$, $\frac{1}{3}x = -7$ является уравнением первой степени. А вот линейные уравнения $0x = 0$, $0x = 2$ уравнениями первой степени не являются.

Числа a и b называют **коэффициентами уравнения первой степени** $ax = b$.

То, что множество уравнений первой степени является подмножеством множества линейных уравнений, иллюстрирует схема на рисунке 41.

Рис. 41

Вы также умеете решать некоторые уравнения, содержащие переменную во второй степени. Например, готовясь к изучению новой темы, вы решили уравнения $x^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$ (упражнение № 614). Каждое из этих уравнений имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$.

Определение

Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Числа a, b и c называют **коэффициентами квадратного уравнения**. Число a называют **первым** или **старшим коэффициентом**, число b — **вторым коэффициентом**, число c — **свободным членом**.

Например, квадратное уравнение $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ имеет следующие коэффициенты: $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$.

Левая часть квадратного уравнения является многочленом второй степени. Поэтому квадратное уравнение ещё называют уравнением второй степени.

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называют **приведённым**.

Например, $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ — это приведённые квадратные уравнения.

Поскольку в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ старший коэффициент не равен нулю, то неприведённое квадратное уравнение всегда можно преобразовать в приведённое, равносильное данному. Разделив обе части уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ на число a, получим приведённое квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют **неполным квадратным уравнением**.

Существует три вида неполных квадратных уравнений:

1) при $b = c = 0$ имеем: $ax^2 = 0$;

2) при $c = 0$ и $b \neq 0$ имеем: $ax^2 + bx = 0$;

3) при $b = 0$ и $c \neq 0$ имеем: $ax^2 + c = 0$.

Решим неполные квадратные уравнения каждого вида.

1. Поскольку $a \neq 0$, то уравнение $ax^2 = 0$ имеет единственный корень $x = 0$.

2. Уравнение $ax^2 + bx = 0$ представим в виде $x(ax + b) = 0$. Это уравнение имеет два корня x_1 и x_2, один из которых равен нулю, а другой является корнем уравнения первой степени $ax + b = 0$. Отсюда $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3. Уравнение $ax^2 + c = 0$ представим в виде $x^2 = -\frac{c}{a}$. Поскольку $c \neq 0$, то возможны два случая: $-\frac{c}{a} < 0$ или $-\frac{c}{a} > 0$. Очевидно, что в первом случае

уравнение корней не имеет. Во втором случае уравнение имеет два корня: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Результаты, полученные при решении неполных квадратных уравнений, оформим в виде таблицы.

Коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$	Неполное квадратное уравнение	Корни
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0,\ c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0,\ -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Корней нет
$b = 0,\ -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Пример. Решите уравнение $x^2 - \frac{4x}{|x|} = 0$.

Решение. При $x > 0$ имеем: $x^2 - \frac{4x}{x} = 0$. Отсюда $x^2 - 4 = 0$; $x = 2$ или $x = -2$. Но корень -2 не удовлетворяет условию $x > 0$.

При $x < 0$ имеем: $x^2 + \frac{4x}{x} = 0$. Отсюда $x^2 + 4 = 0$. Последнее уравнение не имеет корней.

Ответ: 2. ◄

1. Какое уравнение называют линейным?
2. Какое уравнение называют уравнением первой степени?
3. Приведите пример линейного уравнения, являющегося уравнением первой степени, и пример линейного уравнения, которое не является уравнением первой степени.
4. Какое уравнение называют квадратным?
5. Как называют коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?
6. Какое квадратное уравнение называют приведённым?
7. Какое квадратное уравнение называют неполным?
8. Какие существуют виды неполных квадратных уравнений? Какие корни имеет уравнение каждого вида?

Упражнения

616. Укажите среди данных уравнений квадратные и назовите, чему равны старший коэффициент, второй коэффициент и свободный член каждого из них:

1) $x = 0$;
2) $x^2 = 0$;
3) $x^2 + x = 0$;
4) $x^2 + 1 = 0$;
5) $x^2 - 4x + 2 = 0$;
6) $3x^3 - x^2 + 6 = 0$;
7) $-2x^2 + 7x - 8 = 0$;
8) $x^3 - x - 9 = 0$;
9) $6 - x^2 + 4x = 0$;
10) $-x^2 - 2x + 3 = 0$.

617. Составьте квадратное уравнение, в котором:

1) старший коэффициент равен 6, второй коэффициент равен 7, а свободный член равен 2;

2) старший коэффициент равен 1, второй коэффициент равен –8, а свободный член равен $-\frac{1}{3}$;

3) старший коэффициент равен –0,5, второй коэффициент равен 0, а свободный член равен $2\frac{3}{7}$;

4) старший коэффициент равен 7,2, второй коэффициент равен –2, а свободный член равен 0.

618. Составьте квадратное уравнение, в котором:

1) старший коэффициент равен –1, второй коэффициент равен –2, а свободный член равен 1,6;

2) старший коэффициент и свободный член равны 2, а второй коэффициент равен 0.

619. Представьте данное уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$, укажите значения коэффициентов a, b и c:

1) $6x(3 - x) = 7 - 2x^2$;
2) $x(x + 1) = (x - 3)(7x + 2)$;
3) $(5x - 1)^2 = (x + 4)(x - 2)$;
4) $4x(x + 8) - (x - 6)(x + 6) = 0$.

620. Представьте данное уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$, укажите значения коэффициентов a, b и c:

1) $x(x + 10) = 8x + 3$;
2) $(x + 2)^2 = 2x^2 + 4$.

621. Укажите, какие из данных уравнений являются приведёнными, и преобразуйте неприведённые уравнения в приведённые:

1) $x^2 - 5x + 34 = 0$;
2) $2x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $\frac{1}{3}x^2 + x - 5 = 0$;
4) $16 - 6x + x^2 = 0$;
5) $-x^2 + 8x - 7 = 0$;
6) $-0{,}2x^2 + 0{,}8x + 1 = 0$.

622. Преобразуйте данное квадратное уравнение в приведённое:

1) $\frac{1}{6}x^2 - 2x - 3 = 0$;
2) $-4x^2 + 20x - 16 = 0$;
3) $3x^2 + x + 2 = 0$.

623. Какие из чисел 1; 0; –3; 2; –10 являются корнями уравнения $x^2 + 9x - 10 = 0$?

624. Докажите, что:

1) число –1 не является корнем уравнения $x^2 - 2x + 3 = 0$;

2) числа $-\frac{1}{3}$ и –3 являются корнями уравнения $3x^2 + 10x + 3 = 0$;

3) числа $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ являются корнями уравнения $3x^2 - 6 = 0$.

625. Докажите, что:

1) число –5 является корнем уравнения $x^2 + 3x - 10 = 0$;

2) число 4 не является корнем уравнения $\frac{1}{4}x^2 - 4x = 0$.

626. Решите уравнение:

1) $5x^2 - 45 = 0$; 3) $2x^2 - 10 = 0$; 5) $64x^2 - 9 = 0$;
2) $x^2 + 8x = 0$; 4) $2x^2 - 10x = 0$; 6) $x^2 + 16 = 0$.

627. Решите уравнение:

1) $x^2 + 7x = 0$; 2) $2x^2 - 11x = 0$; 3) $3x^2 - 6 = 0$; 4) $-8x^2 = 0$.

628. Решите уравнение:

1) $(3x - 1)(x + 4) = -4$;
2) $(2x - 1)^2 - 6(6 - x) = 2x$;
3) $(x + 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = x^2 - x$.

629. Решите уравнение:

1) $(3x - 2)(3x + 2) + (4x - 5)^2 = 10x + 21$;
2) $(2x - 1)(x + 8) - (x - 1)(x + 1) = 15x$.

630. Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых на 36 больше меньшего из них.

631. Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых на 80 больше большего из них.

632. Докажите, что числа $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$ являются корнями уравнения $x^2 - 4x + 1 = 0$.

633. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 8x}{6} = x$; 2) $\frac{x^2 - 3}{5} - \frac{x^2 - 1}{2} = 2$.

634. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 + x}{7} - \frac{x}{3} = 0$; 2) $\frac{x^2 + 1}{6} - \frac{x^2 + 2}{4} = -1$.

635. При каком значении m:

1) число 2 является корнем уравнения $x^2 + mx - 6 = 0$;
2) число –3 является корнем уравнения $2x^2 - 7x + m = 0$;
3) число $\frac{1}{7}$ является корнем уравнения $m^2x^2 + 14x - 3 = 0$?

636. При каком значении n:

1) число 6 является корнем уравнения $x^2 - nx + 3 = 0$;

2) число 0,5 является корнем уравнения $nx^2 - 8x + 10 = 0$?

637. Решите уравнение, разложив его левую часть на множители способом группировки:

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$; 2) $x^2 + 12x + 20 = 0$; 3) $x^2 + 22x - 23 = 0$.

638. Решите уравнение, выделив в его левой части квадрат двучлена:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$; 2) $x^2 + 6x - 7 = 0$; 3) $x^2 + 8x + 20 = 0$.

639. Решите уравнение, разложив его левую часть на множители:

1) $x^2 - 10x + 9 = 0$; 3) $x^2 - x - 2 = 0$;

2) $x^2 + 2x - 3 = 0$; 4) $x^2 + 6x + 5 = 0$.

640. Сумма квадратов двух последовательных целых чисел на 17 больше, чем удвоенное большее из них. Найдите эти числа.

641. Найдите два последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 1.

642. При каком значении m не является квадратным уравнение:

1) $(m - 4)x^2 + mx + 7 = 0$;

2) $(m^2 + 8m)x^2 + (m + 8)x + 10 = 0$;

3) $(m^2 - 81)x^2 - 6x + m = 0$?

643. Каким числом, положительным или отрицательным, является отличный от нуля корень неполного квадратного уравнения $ax^2 + bx = 0$, если:

1) $a > 0$, $b > 0$; 3) $a > 0$, $b < 0$;

2) $a < 0$, $b > 0$; 4) $a < 0$, $b < 0$?

644. Имеет ли корни неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$, если:

1) $a > 0$, $c > 0$; 3) $a > 0$, $c < 0$;

2) $a < 0$, $c > 0$; 4) $a < 0$, $c < 0$?

645. Каким многочленом можно заменить звёздочку в уравнении $3x^2 - 2x + 4 + * = 0$, чтобы получилось неполное квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

1) 0 и 4; 2) −1 и 1?

646. Каким многочленом можно заменить звёздочку в уравнении $x^2 + 5x - 1 + * = 0$, чтобы получилось неполное квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

1) 0; −7; 2) −4; 4?

647. Решите уравнение:

1) $x^2 - 3|x| = 0$; 3) $x^2 - \frac{|x|}{x} = 0$;

2) $x^2 + |x| - 2x = 0$; 4) $x^2 - \frac{2x^2}{|x|} = 0$.

648. Решите уравнение:

1) $x^2 - 7|x| = 0$; 2) $x^2 - 6|x| + x = 0$; 3) $2x^2 - \dfrac{3x^2}{|x|} = 0$.

649. При каком значении a уравнение $(a - 2)x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 4 = 0$ является:

1) линейным;
2) приведённым квадратным;
3) неполным неприведённым квадратным;
4) неполным приведённым квадратным?

650. Определите, при каком значении a один из корней квадратного уравнения равен 0, и найдите второй корень уравнения:

1) $x^2 + ax + a - 4 = 0$;
2) $4x^2 + (a - 8)x + a^2 + a = 0$;
3) $ax^2 + (a + 3)x + a^2 - 3a = 0$.

Упражнения для повторения

651. Выполните действия:

1) $\dfrac{3 - 2a}{2a} - \dfrac{1 - a^2}{a^2}$;
2) $\dfrac{a^2 - 6b^2}{3b} + 2b$;
3) $\dfrac{4}{c^2 - 4c} - \dfrac{c + 4}{c^2 - 16}$;
4) $\dfrac{56a^5}{b^4} \cdot \dfrac{b^2}{14b^5}$;
5) $\dfrac{72a^3b}{c} : (27a^2b)$;
6) $\dfrac{4a^2 - 1}{a^2 - 9} : \dfrac{10a + 5}{a + 3}$.

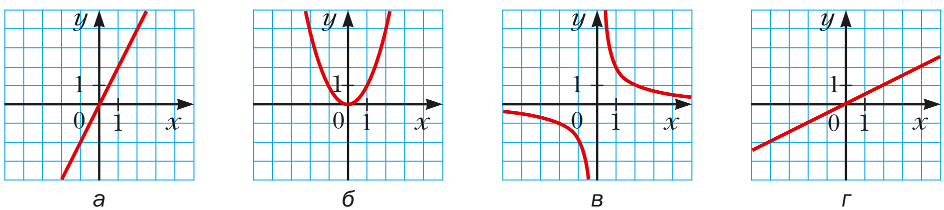
652. Упростите выражение:

1) $10\sqrt{3} - 5\sqrt{48} + 2\sqrt{75}$;
2) $\left(3\sqrt{5} - \sqrt{20}\right)\sqrt{5}$;
3) $\left(5 - \sqrt{2}\right)^2$;
4) $\left(\sqrt{18} - \sqrt{3}\right)\sqrt{2} + 0{,}5\sqrt{24}$.

653. Какой из графиков, представленных на рисунке 42, является графиком функции:

1) $y = x^2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = \dfrac{x}{2}$; 4) $y = \dfrac{2}{x}$?

Рис. 42



654. Ученик задумал двузначное число. Если каждую цифру этого числа увеличить на 2, то полученное число будет на 13 меньше удвоенного задуманного числа. Какое число было задумано?

Учимся делать нестандартные шаги

655. Печатный автомат получает на входе карточку с числами $(a;\ b)$ и выдаёт на выходе карточку с числами $\left(\dfrac{a+b}{2};\ \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\right)$. Можно ли с помощью этого автомата из карточки с числами (0,25; 1000) получить карточку с числами (1,25; 250)?

§ 20. Формула корней квадратного уравнения

Зная коэффициенты a и b уравнения первой степени $ax = b$, можно найти его корень по формуле $x = \dfrac{b}{a}$.

Выведем формулу, позволяющую по коэффициентам a, b и c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находить его корни.

Имеем:

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Поскольку $a \neq 0$, то, умножив обе части этого уравнения на $4a$, получим уравнение, равносильное данному:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Выделим в левой части этого уравнения квадрат двучлена:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0;$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \qquad (2)$$

Существование корней уравнения (2) и их количество зависят от знака значения выражения $b^2 - 4ac$. Это значение называют **дискриминантом квадратного уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$ и обозначают буквой D, то есть $D = b^2 - 4ac$. Термин «дискриминант» происходит от латинского слова *discriminare*, что означает «различать», «разделять».

Теперь уравнение (2) можно записать так:

$$(2ax + b)^2 = D. \qquad (3)$$

Возможны три случая: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Если $D < 0$, то уравнение (3), а следовательно, и уравнение (1) корней не имеют. Действительно, при любом значении x выражение $(2ax + b)^2$ принимает только неотрицательные значения.

Вывод: ***если D < 0, то квадратное уравнение корней не имеет***.

2. Если $D = 0$, то уравнение (3) принимает вид:

$$(2ax + b)^2 = 0.$$

Отсюда $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$.

Вывод: ***если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$.***

3. Если $D > 0$, то уравнение (3) можно записать в виде

$$(2ax + b)^2 = \left(\sqrt{D}\right)^2.$$

Отсюда $2ax + b = -\sqrt{D}$ или $2ax + b = \sqrt{D}$. Тогда $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ или $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Вывод: ***если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня x_1 и x_2:***

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}}.$$

Применяют также краткую форму записи:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}}$$

Эту запись называют **формулой корней квадратного уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$.

Полученную формулу можно применять и в случае, когда $D = 0$. Имеем:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

При решении квадратных уравнений удобно руководствоваться следующим алгоритмом:

- найти дискриминант D квадратного уравнения;
- если $D < 0$, то в ответе записать, что корней нет;
- если $D \geqslant 0$, то воспользоваться формулой корней квадратного уравнения.

Если второй коэффициент квадратного уравнения представить в виде $2k$, то можно пользоваться другой формулой, которая во многих случаях облегчает вычисления.

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + 2kx + c = 0$.

Найдём его дискриминант: $D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$.

Обозначим выражение $k^2 - ac$ через D_1.

Если $D_1 \geqslant 0$, то по формуле корней квадратного уравнения получаем:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2\left(-k \pm \sqrt{D_1}\right)}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

то есть

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = k^2 - ac.$$

<u>**Пример 1.**</u> Решите уравнение:

1) $3x^2 - 2x - 16 = 0$;
2) $-0{,}5x^2 + 2x - 2 = 0$;
3) $x^2 + 5x - 3 = 0$;
4) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
5) $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

Решение. 1) В данном уравнении $a = 3$, $b = -2$, $c = -16$.

Дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196$.

Следовательно, $x_1 = \frac{2 - \sqrt{196}}{6} = \frac{2 - 14}{6} = -2$, $x_2 = \frac{2 + 14}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Ответ: -2; $2\frac{2}{3}$.

2) Имеем:

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-2) = 4 - 4 = 0.$$

Следовательно, данное уравнение имеет один корень:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-1} = 2.$$

Заметим, что данное уравнение можно решить другим способом. Умножив обе части уравнения на -2, получаем:

$$x^2 - 4x + 4 = 0. \text{ Отсюда } (x - 2)^2 = 0;\ x - 2 = 0;\ x = 2.$$

Ответ: 2.

3) $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 25 + 12 = 37$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$.

Ответ можно записать одним из двух способов: $\frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$, $\frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$ либо $\frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

4) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 36 - 44 = -8 < 0$.

Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

5) Представим данное уравнение в виде $5x^2 + 2 \cdot (-8)x + 3 = 0$ и применим формулу корней для уравнения вида $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$D_1 = (-8)^2 - 5 \cdot 3 = 49$;

$x_1 = \frac{8 - 7}{5} = \frac{1}{5}$; $x_2 = \frac{8 + 7}{5} = 3$.

Ответ: $\frac{1}{5}$; 3. ◄

Пример 2. Решите уравнение:

1) $x^2 + 6\sqrt{x^2} - 16 = 0$;

2) $x^2 - 10\left(\sqrt{x}\right)^2 - 24 = 0$;

3) $9x^2 - 8x + \frac{5}{x-1} = 1 + \frac{5}{x-1}$.

Решение. 1) Имеем: $x^2 + 6|x| - 16 = 0$.

При $x \geqslant 0$ получаем уравнение $x^2 + 6x - 16 = 0$, которое имеет корни -8 и 2, однако корень -8 не удовлетворяет условию $x \geqslant 0$.

При $x < 0$ получаем уравнение $x^2 - 6x - 16 = 0$, которое имеет корни -2 и 8, однако корень 8 не удовлетворяет условию $x < 0$.

Ответ: -2; 2.

2) Поскольку $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ при $x \geqslant 0$, то искомые корни должны удовлетворять двум условиям одновременно: $x^2 - 10x - 24 = 0$ и $x \geqslant 0$. В таком случае говорят, что данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 10x - 24 = 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Уравнение $x^2 - 10x - 24 = 0$ имеет корни -2 и 12, но корень -2 не удовлетворяет условию $x \geqslant 0$.

Ответ: 12.

3) Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 9x^2 - 8x = 1, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$ Отсюда

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x - 1 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \text{ или } x = -\frac{1}{9}, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{9}.$$

Ответ: $-\frac{1}{9}$. ◄

Пример 3. При каком значении b имеет единственный корень уравнение:

1) $2x^2 - bx + 18 = 0$;

2) $(b + 6)x^2 - (b - 2)x + 1 = 0$?

Решение. 1) Данное уравнение является квадратным. Оно имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю. Имеем:

$$D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144;$$
$$b^2 - 144 = 0;$$
$$b = -12 \text{ или } b = 12.$$

Ответ: $b = -12$ или $b = 12$.

2) При $b = -6$ получаем линейное уравнение $8x + 1 = 0$, имеющее один корень.

При $b \neq -6$ данное уравнение является квадратным. Оно имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю:

$$D = (b - 2)^2 - 4(b + 6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 = b^2 - 8b - 20.$$

Имеем: $b^2 - 8b - 20 = 0$, отсюда $b = -2$ или $b = 10$.

Ответ: $b = -2$, или $b = 10$, или $b = -6$. ◄

1. Значение какого выражения называют дискриминантом квадратного уравнения?
2. Как зависит количество корней квадратного уравнения от знака дискриминанта?
3. Запишите формулу корней квадратного уравнения.
4. Каким алгоритмом удобно пользоваться при решении квадратных уравнений?

Упражнения

656. Найдите дискриминант и определите количество корней уравнения:
1) $x^2 + 2x - 4 = 0$;
2) $x^2 - 3x + 5 = 0$;
3) $2x^2 - 6x - 3{,}5 = 0$;
4) $5x^2 - 2x + 0{,}2 = 0$.

657. Какое из данных уравнений имеет два корня:
1) $x^2 + 4x + 8 = 0$;
2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$;
3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
4) $2x^2 - 9x + 15 = 0$?

658. Какое из данных уравнений не имеет корней:
1) $x^2 - 6x + 4 = 0$;
2) $5x^2 - 10x + 6 = 0$;
3) $3x^2 + 4x - 2 = 0$;
4) $0{,}04x^2 - 0{,}4x + 1 = 0$?

659. Решите уравнение:
1) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 3 = 0$;
3) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
4) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
5) $x^2 + x - 56 = 0$;
6) $x^2 - 6x - 7 = 0$;
7) $x^2 - 8x + 12 = 0$;
8) $x^2 + 7x + 6 = 0$;
9) $-x^2 + 6x + 55 = 0$;
10) $2x^2 - 3x - 2 = 0$;
11) $2x^2 - x - 6 = 0$;
12) $3x^2 - 4x - 20 = 0$;
13) $10x^2 - 7x - 3 = 0$;
14) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$;
15) $-6x^2 - 7x - 1 = 0$;
16) $3x^2 - 10x + 3 = 0$;
17) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$;
18) $x^2 - 4x + 1 = 0$;
19) $2x^2 - x - 4 = 0$;
20) $x^2 - 8x + 20 = 0$.

660. Решите уравнение:
1) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 12x - 13 = 0$;
3) $x^2 - 7x + 10 = 0$;
4) $x^2 - x - 72 = 0$;
5) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;
6) $2x^2 - 7x - 4 = 0$;
7) $4x^2 - 3x - 1 = 0$;
8) $-2x^2 + x + 15 = 0$;
9) $6x^2 + 7x - 5 = 0$;
10) $18x^2 - 9x - 5 = 0$;
11) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
12) $-x^2 - 8x + 12 = 0$.

661. При каких значениях переменной:
1) значения многочленов $6x^2 - 2$ и $5 - x$ равны;
2) значение двучлена $y - 6$ равно значению трёхчлена $y^2 - 9y + 3$;
3) трёхчлены $4m^2 + 4m + 2$ и $2m^2 + 10m + 8$ принимают равные значения?

662. При каких значениях переменной:
1) значение двучлена $4x + 4$ равно значению трёхчлена $3x^2 + 5x - 10$;
2) значения трёхчленов $10p^2 + 10p + 8$ и $3p^2 - 10p + 11$ равны?

663. Найдите корни уравнения:
1) $(2x - 5)(x + 2) = 18$;
2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
3) $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 16$;
4) $(x - 6)^2 - 2x(x + 3) = 30 - 12x$;
5) $(x + 7)(x - 8) - (4x + 1)(x - 2) = -21x$;
6) $(2x - 1)(2x + 1) - x(1 - x) = 2x(x + 1)$.

664. Решите уравнение:
1) $(x - 4)^2 = 4x - 11$;
2) $(x + 5)^2 + (x - 7)(x + 7) = 6x - 19$;
3) $(3x - 1)(x + 4) = (2x + 3)(x + 3) - 17$.

665. Найдите натуральное число, квадрат которого на 42 больше данного числа.

666. Найдите периметр прямоугольника, площадь которого равна 70 см^2, а одна из сторон на 9 см больше другой.

667. Произведение двух чисел равно 84. Найдите эти числа, если одно из них на 8 меньше другого.

668. Произведение двух последовательных натуральных чисел на 89 больше их суммы. Найдите эти числа.

669. Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 365. Найдите эти числа.

670. Решите уравнение:
1) $2x^2 + x\sqrt{5} - 15 = 0$;
2) $x^2 - x\left(\sqrt{6} - 1\right) - \sqrt{6} = 0$;
3) $\dfrac{x^2 - 4}{8} - \dfrac{2x + 3}{3} = -1$;
4) $\dfrac{4x^2 + x}{3} - \dfrac{x^2 + 17}{9} = \dfrac{5x - 1}{6}$.

671. Решите уравнение:
1) $x^2 + 3x\sqrt{2} + 4 = 0$;
2) $x^2 - x\left(\sqrt{3} + 2\right) + 2\sqrt{3} = 0$;
3) $\dfrac{2x^2 + x}{3} - \dfrac{x + 3}{4} = x - 1$.

672. При каких значениях a число $\dfrac{1}{4}$ является корнем уравнения $a^2x^2 + 4ax - 5 = 0$?

673. При каком значении a число 2 является корнем уравнения $x^2 - 0{,}5ax - 3a^2 = 0$?

674. От квадратного листа картона отрезали полоску в форме прямоугольника шириной 3 см и длиной, равной стороне квадрата. Площадь оставшейся части листа составляет 40 см^2. Какой была длина стороны квадратного листа картона?

675. От прямоугольного листа бумаги, длина которого равна 18 см, отрезали квадрат, сторона которого равна ширине листа. Площадь оставшейся части прямоугольника составляет 72 см^2. Какой была ширина листа бумаги?

676. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если один из них на 14 см меньше другого, а гипотенуза равна 34 см.

677. Найдите стороны прямоугольника, если их разность равна 31 см, а диагональ прямоугольника равна 41 см.

678. Найдите три последовательных нечётных натуральных числа, если квадрат первого из них на 33 больше, чем удвоенная сумма второго и третьего.

679. Найдите четыре последовательных чётных натуральных числа, если сумма первого и третьего чисел в 5 раз меньше, чем произведение второго и четвёртого чисел.

680. Докажите, что если старший коэффициент и свободный член квадратного уравнения имеют разные знаки, то уравнение имеет два корня.

681. (*Старинная индийская задача.*)
На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась.
А двенадцать по лианам
Стали прыгать, повисая.
Сколько было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?

682. В футбольном турнире было сыграно 36 матчей. Сколько команд участвовало в турнире, если каждая команда сыграла по одному разу с каждой из остальных команд?

683. Сколько сторон у многоугольника, если в нём можно провести 90 диагоналей?

684. Решите уравнение:

1) $|x^2 + 7x - 4| = 4$;
2) $5x^2 - 8|x| + 3 = 0$;
3) $x|x| + 6x - 5 = 0$;
4) $x^2 + \dfrac{4x^2}{|x|} - 12 = 0$;

5) $x^2 - 8\sqrt{x^2} + 15 = 0$; 6) $x^2 + 4\sqrt{x^2} - 12 = 0$.

685. Решите уравнение:

1) $|x^2 + 10x - 4| = 20$; 3) $\frac{x^3}{|x|} - 14x - 15 = 0$;

2) $x|x| + 12x - 45 = 0$; 4) $x^2 - 8\sqrt{x^2} - 9 = 0$.

686. Решите уравнение:

1) $x^2 + 2x + \frac{3}{x-8} = \frac{3}{x-8} + 80$; 2) $x^2 + 8\left(\sqrt{x}\right)^2 - 33 = 0$.

687. Решите уравнение:

1) $6x^2 + 5x - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$; 2) $5x^2 - 14\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3 = 0$.

688. При каком значении b имеет единственный корень уравнение:

1) $2x^2 + 4x - b = 0$; 2) $3x^2 - bx + 12 = 0$?

689. При каком значении b имеет единственный корень уравнение:

1) $6x^2 - 18x + b = 0$; 2) $8x^2 + bx + 2 = 0$?

690. Докажите, что при любом значении p имеет два корня уравнение:

1) $4x^2 - px - 3 = 0$; 2) $x^2 + px + p - 2 = 0$.

691. Докажите, что при любом значении m не имеет корней уравнение:

1) $x^2 + mx + m^2 + 1 = 0$; 2) $x^2 - 2mx + 2m^2 + 9 = 0$.

692. Докажите, что при любом значении b уравнение $x^2 + bx - 7 = 0$ имеет два корня.

693. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $x^2 + (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0$; 3) $a^2x^2 - 24ax - 25 = 0$;

2) $x^2 - (2a + 4)x + 8a = 0$; 4) $3(2a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0$.

694. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $x^2 - (2a - 5)x - 3a^2 + 5a = 0$; 3) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$.

2) $x^2 + (3a - 4)x - 12a = 0$;

695. При каком значении b имеет единственный корень уравнение:

1) $bx^2 - 6x - 7 = 0$; 3) $(b - 4)x^2 + (2b - 8)x + 15 = 0$?

2) $(b + 5)x^2 - (b + 6)x + 3 = 0$;

696. При каком значении b имеет единственный корень уравнение:

1) $bx^2 + x + b = 0$; 2) $(b + 3)x^2 + (b + 1)x - 2 = 0$?

Упражнения для повторения

697. Упростите выражение:

$$\left(\frac{a+b}{a} - \frac{4b}{a+b}\right) \cdot \frac{a+b}{a-b}.$$

698. Найдите значение выражения $\frac{(a^{-3})^3}{a^{-2} \cdot a^{-5}}$ при $a = \frac{1}{3}$.

699. Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$ и 4.

700. Имеется лом сплавов двух сортов, которые содержат 5 % и 45 % никеля соответственно. Сколько металлолома каждого из этих сортов нужно взять, чтобы получить 120 т сплава с 30-процентным содержанием никеля?

701. В книге недостаёт нескольких листов. На левой странице разворота стоит номер страницы 24, а на правой — номер 53. Сколько листов недостаёт между этими страницами?

Готовимся к изучению новой темы

702. Решите уравнение, найдите сумму и произведение его корней и сравните их со вторым коэффициентом и свободным членом уравнения:
1) $x^2 - 4x - 12 = 0$;
2) $x^2 + 9x + 14 = 0$.

703. Заполните таблицу, где a, b и c — коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, а x_1 и x_2 — его корни.

Уравнение	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 x_2$
$7x^2 - 8x + 1 = 0$						
$6x^2 + 13x - 15 = 0$						

Учимся делать нестандартные шаги

704. Докажите, что из 101 кубика, которые окрашены в произвольные цвета, можно выбрать или 11 кубиков одного цвета, или 11 кубиков разных цветов.

§ 21. Теорема Виета

Готовясь к изучению этого параграфа, вы выполнили упражнения № 702, 703. Возможно, эти упражнения подсказали вам, каким образом сумма и произведение корней квадратного уравнения связаны с его коэффициентами.

Франсуа Виет (1540—1603) — французский математик, по профессии юрист. В 1591 г. ввёл буквенные обозначения не только для неизвестных величин, но и для коэффициентов уравнений, благодаря чему стало возможным выражать свойства уравнений и их корни общими формулами. Среди своих открытий сам Виет особенно высоко ценил установление зависимости между корнями и коэффициентами уравнений.

Теорема 21.1
(теорема Виета)

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доказательство

Условие теоремы предполагает, что данное квадратное уравнение имеет корни. Поэтому его дискриминант D не может быть отрицательным. Пусть $D > 0$. Применив формулу корней квадратного уравнения, запишем:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Имеем: $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{D}-b+\sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a};$

$$x_1x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-D}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Пусть $D = 0$. В этом случае считают, что $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Имеем:

$$x_1 + x_2 = 2\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. ◄$$

Следствие

Если x_1 и x_2 — корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -b,$$
$$x_1 x_2 = c.$$

Другими словами, *сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.*

Теорема 21.2
(обратная теореме Виета)

Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ и $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Доказательство

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Преобразуем его в приведённое:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Согласно условию теоремы это уравнение можно записать так:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0. \qquad (*)$$

Подставим в левую часть этого уравнения вместо x сначала число α, затем число β. Получим:

$$\alpha^2 - (\alpha + \beta)\alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0;$$
$$\beta^2 - (\alpha + \beta)\beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta = 0.$$

Таким образом, числа α и β являются корнями уравнения (*), а следовательно, и корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. ◄

Следствие

Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -b$ и $\alpha\beta = c$, то эти числа являются корнями приведённого квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$.

Это следствие позволяет решать некоторые квадратные уравнения устно, не используя формулу корней квадратного уравнения.

Пример 1. Найдите сумму и произведение корней уравнения $3x^2 - 15x + 2 = 0$.

Решение. Выясним, имеет ли данное уравнение корни.

Имеем: $D = (-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 225 - 24 > 0$. Следовательно, уравнение имеет два корня x_1 и x_2.

Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{-15}{3} = 5$, $x_1x_2 = \frac{2}{3}$. ◀

Пример 2. Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если его корнями являются числа -7 и 4.

Решение. По теореме Виета $b = -(-7 + 4) = 3$, $c = -7 \cdot 4 = -28$. ◀

Пример 3. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны: 1) 4 и $-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{6-\sqrt{7}}{2}$ и $\frac{6+\sqrt{7}}{2}$.

Решение. 1) Пусть $x_1 = 4$ и $x_2 = -\frac{5}{7}$.

Тогда $x_1 + x_2 = 4 - \frac{5}{7} = \frac{23}{7}$, $x_1x_2 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{20}{7}$.

По теореме, обратной теореме Виета, числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 - \frac{23}{7}x - \frac{20}{7} = 0$. Умножив обе части этого уравнения на 7, получаем квадратное уравнение с целыми коэффициентами:

$7x^2 - 23x - 20 = 0$.

2) Пусть $x_1 = \frac{6-\sqrt{7}}{2}$ и $x_2 = \frac{6+\sqrt{7}}{2}$.

Тогда $x_1 + x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} + \frac{6+\sqrt{7}}{2} = 6$, $x_1x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{6+\sqrt{7}}{2} = \frac{36-7}{4} = \frac{29}{4}$.

Следовательно, x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 - 6x + \frac{29}{4} = 0$. Отсюда искомым является такое уравнение: $4x^2 - 24x + 29 = 0$. ◀

Пример 4. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 3x - 9 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1x_2 = -\frac{9}{2}$.

Тогда имеем: $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{3}$. ◀

Пример 5. Число 4 является корнем уравнения $3x^2 - 10x + n = 0$. Найдите второй корень уравнения и значение n.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения, причём $x_1 = 4$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$. Тогда $x_2 = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$. Имеем: $\frac{n}{3} = x_1x_2 = -\frac{8}{3}$, $n = -8$.

Ответ: $x_2 = -\frac{2}{3}$, $n = -8$. ◄

Пример 6. Составьте квадратное уравнение, корни которого на 4 больше соответствующих корней уравнения $x^2 + 6x - 14 = 0$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения, x_1' и x_2' — корни искомого уравнения.

По условию $x_1' = x_1 + 4$, $x_2' = x_2 + 4$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -6$, $x_1x_2 = -14$.

Тогда имеем:

$x_1' + x_2' = x_1 + 4 + x_2 + 4 = (x_1 + x_2) + 8 = -6 + 8 = 2;$

$x_1'x_2' = (x_1 + 4)(x_2 + 4) = x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 = -14 + 4 \cdot (-6) + 16 = -22.$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Виета, искомым является уравнение $x^2 - 2x - 22 = 0$.

Ответ: $x^2 - 2x - 22 = 0$. ◄

1. Сформулируйте теорему Виета.
2. Сформулируйте следствие из теоремы Виета.
3. Сформулируйте теорему, обратную теореме Виета.
4. Сформулируйте следствие из теоремы, обратной теореме Виета.

Упражнения

705. Чему равна сумма корней уравнения $x^2 + 5x - 10 = 0$:
1) 5; 2) –5; 3) –10; 4) 10?

706. Чему равно произведение корней уравнения $x^2 - 14x + 12 = 0$:
1) –14; 2) 14; 3) 12; 4) –12?

707. Не решая уравнение, найдите сумму и произведение его корней:
1) $x^2 + 6x - 32 = 0$; 3) $2x^2 - 6x + 3 = 0$;
2) $x^2 - 10x + 4 = 0$; 4) $10x^2 + 42x + 25 = 0$.

708. Не решая уравнение, найдите сумму и произведение его корней:
1) $x^2 - 12x - 18 = 0$; 3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 9 = 0$; 4) $-4x^2 - 8x + 27 = 0$.

709. Применяя теорему, обратную теореме Виета, определите, являются ли корнями уравнения:
1) $x^2 - 8x + 12 = 0$ числа 2 и 6;

2) $x^2 + x - 56 = 0$ числа -7 и 8;
3) $x^2 - 13x + 42 = 0$ числа 5 и 8;
4) $x^2 - 20x - 99 = 0$ числа 9 и 11.

710. Применяя теорему, обратную теореме Виета, определите, являются ли корнями уравнения:
1) $x^2 + 2x - 3 = 0$ числа 1 и -2;
2) $x^2 + 5x + 6 = 0$ числа -2 и -3.

711. Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если его корнями являются числа:
1) -8 и 6; 2) 4 и 5.

712. Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если его корнями являются числа:
1) -2 и 0,5; 2) -10 и -20.

713. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны:
1) 2 и 5; 3) $-0{,}2$ и -10; 5) 0 и 6;
2) $-\frac{1}{3}$ и 2; 4) $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$; 6) $-\sqrt{7}$ и $\sqrt{7}$.

714. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны:
1) -7 и -8; 2) 5 и $-0{,}4$; 3) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; 4) $5-\sqrt{10}$ и $5+\sqrt{10}$.

715. Число -2 является корнем уравнения $x^2 - 8x + q = 0$. Найдите значение q и второй корень уравнения.

716. Число 7 является корнем уравнения $x^2 + px - 42 = 0$. Найдите значение p и второй корень уравнения.

717. Число $\frac{1}{3}$ является корнем уравнения $6x^2 - bx + 4 = 0$. Найдите значение b и второй корень уравнения.

718. Число $-0{,}2$ является корнем уравнения $4x^2 - 5{,}6x + m = 0$. Найдите значение m и второй корень уравнения.

719. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x - 13 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения $x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$.

720. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $5x^2 + 4x - 13 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения $3x_1x_2 - x_1 - x_2$.

721. При каком значении b корни уравнения $x^2 + bx - 17 = 0$ являются противоположными числами? Найдите эти корни.

722. Применяя теорему, обратную теореме Виета, решите уравнение:
1) $x^2 - 5x + 4 = 0$; 4) $x^2 + 4x - 5 = 0$; 7) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
2) $x^2 + 5x + 4 = 0$; 5) $x^2 - 9x + 20 = 0$; 8) $x^2 - 3x - 18 = 0$.
3) $x^2 - 4x - 5 = 0$; 6) $x^2 - x - 2 = 0$;

723. Применяя теорему, обратную теореме Виета, решите уравнение:
1) $x^2 - 10x + 24 = 0$; 3) $x^2 - 2x - 8 = 0$;
2) $x^2 + 6x + 8 = 0$; 4) $x^2 + x - 12 = 0$.

724. Какие из данных уравнений имеют два положительных корня, какие — два отрицательных, а какие — корни разных знаков:
1) $x^2 - 12x + 14 = 0$; 4) $x^2 + 16x + 10 = 0$;
2) $x^2 + 6x - 42 = 0$; 5) $x^2 - 24x + 0{,}1 = 0$;
3) $x^2 - 7x - 30 = 0$; 6) $x^2 + 20x + 3 = 0$?

725. Один из корней уравнения $x^2 - 10x + c = 0$ на 8 меньше другого. Найдите значение c и корни уравнения.

726. Корни уравнения $x^2 + 20x + a = 0$ относятся как $7 : 3$. Найдите значение a и корни уравнения.

727. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 7x + m = 0$ удовлетворяют условию $2x_1 - 5x_2 = 28$. Найдите корни уравнения и значение m.

728. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 4x + n = 0$ удовлетворяют условию $3x_1 - x_2 = 8$. Найдите корни уравнения и значение n.

729. Найдите, пользуясь теоремой, обратной теореме Виета, корни уравнения:
1) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; 3) $16x^2 - 23x + 7 = 0$;
2) $2x^2 + 5x + 3 = 0$; 4) $-8x^2 - 19x + 27 = 0$.

730. Найдите, пользуясь теоремой, обратной теореме Виета, корни уравнения:
1) $7x^2 + 11x - 18 = 0$; 2) $9x^2 - 5x - 4 = 0$.

731. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 9x + 6 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения:
1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 + x_2^2$; 3) $(x_1 - x_2)^2$; 4) $x_1^3 + x_2^3$.

732. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 5x - 16 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения:
1) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$; 2) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$; 3) $|x_2 - x_1|$.

733. Составьте квадратное уравнение, корни которого на 2 меньше соответствующих корней уравнения $x^2 + 8x - 3 = 0$.

734. Составьте квадратное уравнение, корни которого на 3 больше соответствующих корней уравнения $x^2 - 12x + 4 = 0$.

735. Составьте квадратное уравнение, корни которого в 3 раза меньше соответствующих корней уравнения $2x^2 - 14x + 9 = 0$.

736. Составьте квадратное уравнение, корни которого в 2 раза больше соответствующих корней уравнения $2x^2 - 15x + 4 = 0$.

737. Сумма квадратов корней уравнения $3x^2 + ax - 7 = 0$ равна $\frac{46}{9}$. Найдите значение a.

738. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - ax + 8 = 0$ удовлетворяют условию $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$. Найдите значение a.

739. Верно ли утверждение:
1) уравнение $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$ имеет корни разных знаков при любом значении a;
2) если уравнение $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$ имеет корни, то независимо от значения a они оба отрицательны?

740. Найдите все целые значения b, при которых имеет целые корни уравнение:
1) $x^2 + bx + 6 = 0$; 2) $x^2 + bx - 12 = 0$.

741. Найдите все целые значения b, при которых имеет целые корни уравнение:
1) $x^2 + bx + 8 = 0$; 2) $x^2 + bx - 18 = 0$.

742. Корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$ равны его коэффициентам b и c. Найдите b и c.

743. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ равна: 1) 12; 2) 6?

744. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ равна 9?

Упражнения для повторения

745. Сократите дробь:
1) $\frac{4a - 16}{a^2 - 16}$; 3) $\frac{c^2 + 10c + 25}{5c + 25}$; 5) $\frac{n^3 - n^5}{n^3 - n}$;
2) $\frac{12b^3 - 8b^2}{2 - 3b}$; 4) $\frac{4 - m^2}{m^2 - 4m + 4}$; 6) $\frac{2 - 2x^2}{4x^2 - 8x + 4}$.

746. В саду посадили рядами 48 деревьев с одинаковым количеством деревьев в каждом ряду. Рядов оказалось на 8 меньше, чем деревьев в каждом из них. Сколько деревьев посадили в каждом ряду и сколько было рядов?

747. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = x + 2$. Начертите графики данных функций и отметьте найденные точки.

748. В саду 60 % деревьев составляют вишни и сливы, из них 30 % составляют сливы. Какой процент всех деревьев сада составляют сливы?

Готовимся к изучению новой темы

749. Пользуясь методом группировки, разложите на множители многочлен:
1) $x^2 - 7x + 10$;
2) $y^2 + 3y - 4$;
3) $a^2 + 8a + 12$;
4) $x^2 - x - 6$.

Учимся делать нестандартные шаги

750. Вася задумал три цифры: x, y, z. Петя называет три числа: a, b, c. Вася сообщает Пете значение выражения $ax + by + cz$. Какие числа должен назвать Петя, чтобы по полученной информации определить, какие цифры задумал Вася?

Задание № 5 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Какое из данных уравнений не является квадратным?
А) $x^2 = 0$ Б) $x^2 + x = 0$ В) $x^3 + x = 0$ Г) $x^2 + x - 2 = 0$

2. Решите уравнение $9x - x^2 = 0$.
А) –3; 0; 3 Б) 0; 3 В) –3; 3 Г) 0; 9

3. Решите уравнение $\frac{x^2 - x}{6} - \frac{x - 2}{3} = \frac{3 - x}{2}$.
А) 0; 5 Б) 5 В) $\sqrt{5}$ Г) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$

4. Какое из данных уравнений не имеет корней?
А) $x^2 - 5x - 2 = 0$ В) $x^2 - 2x + 5 = 0$
Б) $x^2 - 5x + 2 = 0$ Г) $x^2 + 2x - 5 = 0$

5. Сколько корней имеет уравнение $6x^2 + 13x + 5 = 0$?
А) два В) ни одного
Б) бесконечно много Г) один

6. Найдите корни уравнения $x^2 + 4x - 21 = 0$.
А) 7; –3 Б) –7; 3 В) –7; –3 Г) 3; 7

7. Чему равна сумма корней уравнения $x^2 - 10x - 12 = 0$?
А) 10 Б) –10 В) –12 Г) 12

8. Чему равно произведение корней уравнения $3x^2 - 16x + 6 = 0$?
А) 6 Б) 2 В) –16 Г) $\frac{16}{3}$

9. При каких значениях переменной принимают равные значения выражения $(3x - 1)(x + 2)$ и $(x - 12)(x - 4)$?
А) –12,5; 2 Б) 12,5; –2 В) –25; 4 Г) 25; –4

10. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны $3 - \sqrt{2}$ и $3 + \sqrt{2}$.
А) $x^2 + 6x - 7 = 0$ В) $x^2 + 6x + 7 = 0$
Б) $x^2 - 6x - 7 = 0$ Г) $x^2 - 6x + 7 = 0$

11. Решите уравнение $x|x| - 9x - 10 = 0$.
А) $-1;\ 10;\ \frac{-9 - \sqrt{41}}{2};\ \frac{-9 + \sqrt{41}}{2}$ В) $-1;\ \frac{-9 - \sqrt{41}}{2}$
Б) $10;\ \frac{-9 - \sqrt{41}}{2};\ \frac{-9 + \sqrt{41}}{2}$ Г) –1; 10

12. Число –5 является корнем уравнения $2x^2 + 9x + c = 0$. Найдите второй корень уравнения и значение c.
А) $x_2 = 0{,}5,\ c = -5$ В) $x_2 = 9{,}5,\ c = 22{,}5$
Б) $x_2 = -0{,}5,\ c = 5$ Г) $x_2 = 9{,}5,\ c = -22{,}5$

§ 22. Квадратный трёхчлен

Определение

Квадратным трёхчленом называют многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Приведём примеры многочленов, являющихся квадратными трёхчленами:

$$2x^2 - 3x + 5;\ x^2 + 7x;\ x^2 - 5;\ 3x^2.$$

Заметим, что левая часть квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ является квадратным трёхчленом.

Определение

Корнем квадратного трёхчлена называют значение переменной, при котором значение квадратного трёхчлена равно нулю.

Например, число 2 является корнем квадратного трёхчлена $x^2 - 6x + 8$.

Чтобы найти корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, надо решить соответствующее квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Число $D = b^2 - 4ac$ называют **дискриминантом квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$**.

Если $D < 0$, то квадратный трёхчлен корней не имеет. Если $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет один корень, если $D > 0$ — то два корня.

Рассмотрим квадратный трёхчлен $x^2 - 3x + 2$. Разложим его на множители методом группировки. (Подобное упражнение, № 749, вы выполняли во время подготовки к изучению этого параграфа.)

Имеем:

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2).$$

О таком тождественном преобразовании говорят, что квадратный трёхчлен $x^2 - 3x + 2$ разложили на **линейные множители** $x - 1$ и $x - 2$.

Связь между корнями квадратного трёхчлена и линейными множителями, на которые он раскладывается, устанавливает следующая теорема.

Теорема 22.1

Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положительный, то данный трёхчлен можно разложить на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена.

Доказательство

Поскольку числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Тогда $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$ $= ax^2 + bx + c$. ◄

Замечание. Если дискриминант квадратного трёхчлена равен нулю, то считают, что квадратный трёхчлен имеет два равных корня, то есть $x_1 = x_2$. В этом случае разложение квадратного трёхчлена на линейные множители имеет следующий вид:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Теорема 22.2

Если дискриминант квадратного трёхчлена отрицательный, то данный трёхчлен нельзя разложить на линейные множители.

Доказательство

Предположим, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ можно разложить на линейные множители. Тогда существуют такие числа k, m и n, что выполняется равенство $ax^2 + bx + c = k(x - m)(x - n)$. Отсюда получаем, что m и n — корни данного квадратного трёхчлена. Следовательно, его дискриминант неотрицательный, что противоречит условию. ◄

Пример 1. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

1) $x^2 - 14x - 32$; 2) $-x^2 + 17x - 30$; 3) $3x^2 - 7x + 2$.

Решение. 1) Найдём корни данного трёхчлена:

$$x^2 - 14x - 32 = 0;$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = 16.$$

Следовательно, $x^2 - 14x - 32 = (x + 2)(x - 16)$.

2) Решим уравнение $-x^2 + 17x - 30 = 0$. Имеем:

$$x^2 - 17x + 30 = 0;$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 15.$$

Следовательно, $-x^2 + 17x - 30 = -(x - 2)(x - 15)$.

3) Решим уравнение $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Имеем:

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 2.$$

Тогда $3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$. ◄

Пример 2. Сократите дробь $\dfrac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1}$.

Решение. Разложим на множители квадратный трёхчлен, являющийся числителем данной дроби. Решив уравнение $6a^2 - a - 1 = 0$, получаем:

$a_1 = -\dfrac{1}{3}$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$. Теперь можно записать

$$6a^2 - a - 1 = 6\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) = 3\left(a + \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(a - \frac{1}{2}\right) = (3a + 1)(2a - 1).$$

Тогда получаем:

$$\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1} = \frac{(3a + 1)(2a - 1)}{(3a + 1)(3a - 1)} = \frac{2a - 1}{3a - 1}.$$

Ответ: $\dfrac{2a - 1}{3a - 1}$. ◄

Пример 3. При каком значении m разложение на множители трёхчлена $2x^2 + 9x + m$ содержит множитель $(x + 5)$?

Решение. Поскольку разложение данного трёхчлена на множители должно содержать множитель $(x + 5)$, то один из корней этого трёхчлена равен -5.

Тогда имеем:

$$2 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) + m = 0;$$
$$m = -5.$$

Ответ: $m = -5$. ◄

1. Какой многочлен называют квадратным трёхчленом?
2. Что называют корнем квадратного трёхчлена?
3. Что называют дискриминантом квадратного трёхчлена?
4. В каком случае квадратный трёхчлен не имеет корней; имеет один корень? Имеет два корня?
5. В каком случае квадратный трёхчлен можно разложить на линейные множители?
6. По какой формуле квадратный трёхчлен можно разложить на линейные множители?
7. В каком случае квадратный трёхчлен нельзя разложить на линейные множители?

Упражнения

751. Найдите корни квадратного трёхчлена:

1) $x^2 - x - 12$;	4) $16x^2 - 24x + 3$;
2) $x^2 + 2x - 35$;	5) $4x^2 + 28x + 49$;
3) $3x^2 - 16x + 5$;	6) $3x^2 + 21x - 90$.

752. Можно ли разложить на линейные множители квадратный трёхчлен:

1) $x^2 - 12x + 6$;
2) $3x^2 - 8x + 6$;
3) $2a^2 - 8a + 8$;
4) $-6b^2 + b + 12$?

753. Разложите на линейные множители квадратный трёхчлен:

1) $x^2 - 7x + 12$;
2) $x^2 + 8x + 15$;
3) $x^2 - 3x - 10$;
4) $-x^2 - 5x - 6$;
5) $-x^2 + x + 2$;
6) $6x^2 - 5x - 1$;
7) $4x^2 + 3x - 22$;
8) $-3a^2 + 8a + 3$;
9) $\frac{1}{6}b^2 - \frac{5}{6}b + 1$;
10) $-2x^2 - 0{,}5x + 1{,}5$;
11) $0{,}4x^2 - 2x + 2{,}5$;
12) $-1{,}2m^2 + 2{,}6m - 1$.

754. Разложите на линейные множители квадратный трёхчлен:

1) $x^2 - 3x - 18$;
2) $x^2 + 5x - 14$;
3) $-x^2 + 3x + 4$;
4) $5x^2 + 8x - 4$;
5) $2a^2 - 3a + 1$;
6) $4b^2 - 11b - 3$;
7) $-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$;
8) $0{,}3m^2 - 3m + 7{,}5$;
9) $x^2 - 2x - 2$.

755. Сократите дробь:

1) $\frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$;
2) $\frac{x - 4}{x^2 - 10x + 24}$;
3) $\frac{3x - 15}{x^2 - x - 20}$;
4) $\frac{x^2 - 3x + 2}{6x - 6}$;
5) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x}$;
6) $\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x - 8}$.

756. Сократите дробь:

1) $\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$;
2) $\frac{2x + 12}{x^2 + 3x - 18}$;
3) $\frac{x^2 + 9x + 14}{x^2 + 7x}$.

757. Сократите дробь:

1) $\frac{4a^2 - 9}{2a^2 - 9a - 18}$;
2) $\frac{2b^2 - 7b + 3}{4b^2 - 4b + 1}$;
3) $\frac{c^2 - 5c - 6}{c^2 - 8c + 12}$;
4) $\frac{m^3 - 1}{m^2 + 9m - 10}$;
5) $\frac{x^2 - 16}{32 - 4x - x^2}$;
6) $\frac{4n^2 - 9n + 2}{2 + 9n - 5n^2}$.

758. Сократите дробь:

1) $\frac{4x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$;
2) $\frac{2y^2 + 3y - 5}{y^2 - 2y + 1}$;
3) $\frac{a^2 + 5a + 4}{a^2 - a - 20}$;
4) $\frac{3 + 20b - 7b^2}{7b^2 - 6b - 1}$.

759. При каком значении b разложение на линейные множители трёхчлена:

1) $2x^2 - 5x + b$ содержит множитель $(x - 3)$;
2) $-4x^2 + bx + 2$ содержит множитель $(x + 1)$;
3) $3x^2 - 4x + b$ содержит множитель $(3x - 2)$?

760. При каком значении a разложение на линейные множители трёхчлена:
1) $2x^2 - 7x + a$ содержит множитель $(x - 4)$;
2) $4x^2 - ax + 6$ содержит множитель $(2x + 1)$?

761. Упростите выражение:
1) $\frac{9a^2 - 4}{2a^2 - 5a + 2} \cdot \frac{a - 2}{3a + 2} + \frac{a - 1}{1 - 2a}$;
2) $\frac{b - 4}{b^3 - b} : \left(\frac{b - 1}{2b^2 + 3b + 1} - \frac{1}{b^2 - 1}\right)$;
3) $\left(\frac{c + 2}{c^2 - c - 6} - \frac{2c}{c^2 - 6c + 9}\right) : \frac{c^2 + 3c}{(2c - 6)^2}$;
4) $\left(\frac{3}{m - 4} + \frac{2m}{m + 1} + \frac{4m - 6}{m^2 - 3m - 4}\right) \cdot \frac{4m - 16}{2m - 3}$.

762. Докажите, что при всех допустимых значениях a значение выражения не зависит от значения переменной:
1) $\frac{25a^2 - 36}{10a^2 - 9a + 2} : \frac{5a + 6}{5a - 2} + \frac{9a - 8}{1 - 2a}$;
2) $\left(\frac{2a}{a + 3} + \frac{1}{a - 1} - \frac{4}{a^2 + 2a - 3}\right) : \frac{2a + 1}{a + 3}$.

763. Постройте график функции:
1) $y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1}$;
2) $y = \frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3} - \frac{x^2 - 4}{x + 2}$.

764. Постройте график функции:
1) $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$;
2) $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} - \frac{x^2 - x - 30}{x + 5}$.

765. Разложите на множители многочлен:
1) $x^2 - 6xy + 5y^2$;
2) $a^2 + 5ab - 36b^2$;
3) $3m^2 - 8mn - 3n^2$;
4) $4x^2 - 5xy + y^2$.

766. Разложите на множители многочлен:
1) $a^2 - 14ab + 40b^2$;
2) $12b^2 + bc - 6c^2$.

767. Для каждого значения a решите уравнение:
1) $(a^2 - a - 6)x = a^2 - 9$;
2) $(a^2 - 8a + 7)x = 2a^2 - 13a - 7$.

768. Для каждого значения a решите уравнение $(a^2 + 7a - 8)x = a^2 + 16a + 64$.

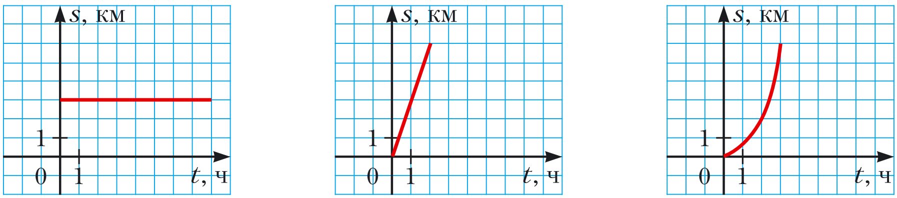
Упражнения для повторения

769. Сократите дробь:
1) $\frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$;
2) $\frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10} - 5\sqrt{2}}$;
3) $\frac{2 - \sqrt{6}}{\sqrt{6} - 3}$;

4) $\dfrac{4a-2}{2\sqrt{a}+\sqrt{2}}$; 5) $\dfrac{9a-b^2}{9a+6b\sqrt{a}+b^2}$; 6) $\dfrac{a\sqrt{a}-8}{a+2\sqrt{a}+4}$.

770. Какой из графиков, представленных на рисунке 43, является графиком движения пешехода, который шёл с постоянной скоростью? Определите скорость движения этого пешехода.

Рис. 43



а б в

771. Смешали 2 л молока жирностью 8 % и 3 л молока жирностью 6 %. Какова жирность полученной смеси?

Готовимся к изучению новой темы

772. Решите уравнение:

1) $x^2 = 9$;
2) $x^2 = -9$;
3) $(4x+1)^2 = 9$;
4) $(x-1)^2 = 5$;
5) $\sqrt{x} = 9$;
6) $\sqrt{x} = -9$.

773. Решите уравнение:

1) $\dfrac{4x-1}{x-2} = \dfrac{x+5}{x-2}$;
2) $\dfrac{2y^2-3y-20}{y-4} - y = 1$;
3) $\dfrac{5x-3}{x+1} - \dfrac{4x-2}{x+2} = 1$;
4) $\dfrac{1}{y-5} - \dfrac{1}{y+4} = \dfrac{9}{(y-5)(y+4)}$.

Учимся делать нестандартные шаги

774. Рассматриваются все прямоугольники, длины сторон которых — натуральные числа. Каких прямоугольников больше: с периметром 1000 или с периметром 1002?

§ 23. Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

Пример 1. Решите уравнение $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Решение. Пусть $x^2 = t$. Тогда $x^4 = t^2$. Подставив в исходное уравнение вместо x^2 и x^4 соответственно t и t^2, получим квадратное уравнение с переменной t:

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Решив это уравнение, находим: $t_1 = 4$, $t_2 = 9$. Поскольку $t = x^2$, то решение исходного уравнения сводится к решению двух уравнений:

$$x^2 = 4 \text{ и } x^2 = 9.$$

Отсюда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Ответ можно записать двумя способами: -2; 2; -3; 3 либо ± 2; ± 3. ◄

Определение

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют биквадратным уравнением.

Заменой $x^2 = t$ биквадратное уравнение сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$. Такой способ решения уравнений называют **методом замены переменной**.

Метод замены переменной можно использовать не только при решении биквадратных уравнений.

Пример 2. Решите уравнение $(2x - 1)^4 + (2x - 1)^2 - 2 = 0$.

Решение. Выполним замену $(2x - 1)^2 = t$. Тогда исходное уравнение сводится к квадратному уравнению

$$t^2 + t - 2 = 0.$$

Отсюда $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Теперь надо решить следующие два уравнения:

$$(2x - 1)^2 = -2 \text{ и } (2x - 1)^2 = 1.$$

Первое из них корней не имеет. Из второго уравнения получаем:

$$2x - 1 = -1 \text{ или } 2x - 1 = 1.$$

Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Ответ: 0; 1. ◄

Пример 3. Решите уравнение $6x + 5\sqrt{x} + 1 = 0$.

Решение. Пусть $\sqrt{x} = t$. Тогда $x = t^2$. Получаем: $6t^2 + 5t + 1 = 0$.

Отсюда $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Получаем два уравнения:

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{3},\ \sqrt{x} = -\frac{1}{2}.$$

Поскольку $\sqrt{x} \geqslant 0$, то эти уравнения корней не имеют, а следовательно, и исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет. ◄

Пример 4. Решите уравнение $\frac{x^2+2x}{x-6} = \frac{5x+18}{x-6}$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2+2x = 5x+18, \\ x-6 \neq 0. \end{cases}$

Отсюда: $\begin{cases} x^2-3x-18=0, \\ x \neq 6; \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -3 \text{ или } x = 6, \\ x \neq 6; \end{cases}$$

$x = -3$.

Ответ: -3. ◄

Пример 5. Решите уравнение $\frac{5}{x^2-4x+4} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$.

Решение. Имеем: $\frac{5}{(x-2)^2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} = 0;$

$$\frac{5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)} = 0.$$

Следовательно, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Отсюда: $\begin{cases} 5x+10-4x+8-x^2+4x-4=0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2-5x-14=0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \text{ или } x = -2, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$x = 7$.

Ответ: 7.

Какое уравнение называют биквадратным?

Упражнения

775. Решите уравнение:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;
3) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
4) $x^4 + 14x^2 - 32 = 0$;
5) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$;
6) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0$.

776. Решите уравнение:

1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$;
2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$;
3) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$;
4) $x^4 + 3x^2 - 70 = 0$;
5) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;
6) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

777. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 1} = 0$;
2) $\dfrac{x^2 - 6x - 7}{x - 7} = 0$;
3) $\dfrac{3x^2 - x - 2}{1 - x} = 0$;
4) $\dfrac{x^2 - 8x}{x + 10} = \dfrac{20}{x + 10}$;
5) $\dfrac{x^2 - 14}{x + 2} = \dfrac{5x}{x + 2}$;
6) $\dfrac{x^2 + 10x}{x - 8} = \dfrac{12x + 48}{x - 8}$;
7) $\dfrac{x^2 + 4x}{x - 5} - \dfrac{9x + 50}{x - 5} = 0$;
8) $\dfrac{x^2 - 6x}{x - 3} + \dfrac{15 - 2x}{x - 3} = 0$;
9) $\dfrac{x^2 - 6x}{x - 4} = 4$;
10) $\dfrac{5x + 18}{x - 2} = x$;
11) $x + 1 = \dfrac{6}{x}$;
12) $5 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{18}{x}$.

778. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2 - 5x - 6}{x - 6} = 0$;
2) $\dfrac{4x^2 - 7x - 2}{x - 2} = 0$;
3) $\dfrac{2x^2 + 6}{x + 8} = \dfrac{13x}{x + 8}$;
4) $\dfrac{x^2 + 4x}{x + 7} = \dfrac{5x + 56}{x + 7}$;
5) $\dfrac{x^2 + 12x}{x + 4} - \dfrac{5x - 12}{x + 4} = 0$;
6) $\dfrac{x^2 - 3x}{x + 6} = 6$;
7) $\dfrac{2 - 33y}{y - 4} = 7y$;
8) $y - \dfrac{39}{y} = 10$.

779. Решите уравнение:

1) $(x+3)^4-3(x+3)^2-4=0$;
3) $(6x-7)^4+4(6x-7)^2+3=0$;
2) $(2x+1)^4-10(2x+1)^2+9=0$;
4) $(x-4)^4+2(x-4)^2-8=0$.

780. Решите уравнение:

1) $(3x-1)^4-20(3x-1)^2+64=0$;
2) $(2x+3)^4-24(2x+3)^2-25=0$.

781. Решите уравнение:

1) $x-3\sqrt{x}+2=0$;
3) $3x-10\sqrt{x}+3=0$;
5) $6\sqrt{x}-27+x=0$;
2) $x-\sqrt{x}-12=0$;
4) $8\sqrt{x}+x+7=0$;
6) $8x-10\sqrt{x}+3=0$.

782. Решите уравнение:

1) $x-6\sqrt{x}+8=0$;
2) $x-5\sqrt{x}-50=0$;
3) $2x-3\sqrt{x}+1=0$.

783. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2-9x+18}{x^2-9}=0$;
3) $\dfrac{x^2-12x+35}{x^2-10x+25}=0$;
2) $\dfrac{3x^2-14x-5}{3x^2+x}=0$;
4) $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2+2x-3}=0$.

784. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2-9x-10}{x^2-1}=0$;
2) $\dfrac{x^2+5x-14}{x^2-6x+8}=0$.

785. Решите уравнение:

1) $\dfrac{2y}{y-3}=\dfrac{3y+3}{y}$;
3) $\dfrac{5x+2}{x-1}=\dfrac{4x+13}{x+7}$;
2) $\dfrac{3x+4}{x-3}=\dfrac{2x-9}{x+1}$;
4) $\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}=3x-4$.

786. Найдите корни уравнения:

1) $\dfrac{2x-13}{x-6}=\dfrac{x+6}{x}$;
2) $\dfrac{3x^2-4x-20}{x+2}=2x-5$.

787. Найдите корни уравнения:

1) $\dfrac{10}{x+2}+\dfrac{9}{x}=1$;
6) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{10}{x^2-5x}=\dfrac{3-x}{x-5}$;
2) $\dfrac{48}{14-x}-\dfrac{48}{14+x}=1$;
7) $\dfrac{4x}{x^2+4x+4}-\dfrac{x-2}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x}$;
3) $\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{8}{x^2-4}$;
8) $\dfrac{6}{x^2-36}-\dfrac{3}{x^2-6x}+\dfrac{x-12}{x^2+6x}=0$;
4) $\dfrac{x-1}{x+3}+\dfrac{x+1}{x-3}=\dfrac{2x+18}{x^2-9}$;
9) $\dfrac{x}{x+7}+\dfrac{x+7}{x-7}=\dfrac{63-5x}{x^2-49}$;
5) $\dfrac{4x-10}{x-1}+\dfrac{x+6}{x+1}=4$;
10) $\dfrac{4}{x^2-10x+25}-\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{10}{x^2-25}$.

788. Решите уравнение:

1) $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = \frac{1}{5}$;

2) $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{16}{x^2-4}$;

3) $\frac{9}{x+3} + \frac{14}{x-3} = \frac{24}{x}$;

4) $\frac{2y+3}{2y+2} - \frac{y+1}{2y-2} + \frac{1}{y^2-1} = 0$;

5) $\frac{3x}{x^2-10x+25} - \frac{x-3}{x^2-5x} = \frac{1}{x}$;

6) $\frac{x-20}{x^2+10x} + \frac{10}{x^2-100} - \frac{5}{x^2-10x} = 0$.

789. При каком значении переменной:

1) сумма дробей $\frac{24}{x-2}$ и $\frac{16}{x+2}$ равна 3;

2) значение дроби $\frac{42}{x}$ на $\frac{1}{4}$ больше значения дроби $\frac{36}{x+20}$?

790. При каком значении переменной:

1) значение дроби $\frac{30}{x+3}$ на $\frac{1}{2}$ меньше значения дроби $\frac{30}{x}$;

2) значение дроби $\frac{20}{x}$ на 9 больше значения дроби $\frac{20}{x+18}$?

791. Решите уравнение:

1) $\frac{2x-10}{x^3+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{5x-1}{x^2-x+1}$;

2) $\frac{6}{x^2-4x+3} + \frac{5-2x}{x-1} = \frac{3}{x-3}$;

3) $\frac{4x-6}{x+2} - \frac{x}{x+1} = \frac{14}{x^2+3x+2}$;

4) $\frac{x}{x^2-4} - \frac{3x-1}{x^2+x-6} = \frac{2}{x^2+5x+6}$.

792. Решите уравнение:

1) $\frac{3x+2}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+39}{x^3-8} = \frac{5}{x-2}$;

2) $\frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{8}{x^2+2x-3}$.

793. Решите уравнение методом замены переменной:

1) $(x^2-2)^2 - 8(x^2-2) + 7 = 0$;

2) $(x^2+5x)^2 - 2(x^2+5x) - 24 = 0$;

3) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+3) = 3$;

4) $(x^2+2x+2)(x^2+2x-4) = -5$.

794. Решите уравнение методом замены переменной:

1) $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 - \frac{6(2x-1)}{x} + 5 = 0$;

2) $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+1}{3x-1} = 3\frac{1}{3}$.

795. Решите уравнение:

1) $(x^2-6x)^2 + (x^2-6x) - 56 = 0$;

2) $(x^2+8x+3)(x^2+8x+5) = 63$;

3) $\frac{x^4}{(x-2)^2} - \frac{4x^2}{x-2} - 5 = 0$;

4) $\frac{x+4}{x-3} - \frac{x-3}{x+4} = \frac{3}{2}$.

796. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 8x + 7}{x - a} = 0$;

2) $\frac{x - a}{x^2 - 8x + 7} = 0$;

3) $\frac{x^2 - (3a + 2)x + 6a}{x - 6} = 0$;

4) $\frac{a(x - a)}{x + 3} = 0$.

797. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2 - ax + 5}{x - 1} = 0$ имеет единственный корень?

Упражнения для повторения

798. Верно ли утверждение, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения

$$(a-1)^2\left(\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{a^2-2a+1}\right)+\frac{2}{a+1}$$

является положительным числом?

799. Каким числом, рациональным или иррациональным, является значение выражения $\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} - \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}$?

800. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, \text{ если } x < -2, \\ x^2, \text{ если } x \geqslant -2. \end{cases}$$

Учимся делать нестандартные шаги

801. На экране монитора компьютера записано число 1. Ежесекундно компьютер прибавляет к числу, находящемуся на экране, сумму его цифр. Может ли через некоторое время на экране появиться число 123 456 789?

Когда сделаны уроки

Решение уравнений методом замены переменной

В § 23 вы познакомились с решением уравнений методом замены переменной. Рассмотрим ещё несколько примеров, иллюстрирующих эффективность этого метода.

Пример 1. Решите уравнение $\frac{x^2-3x-6}{x}-\frac{8x}{x^2-3x-6}=-2.$

Решение. Пусть $\frac{x^2-3x-6}{x}=t$. Тогда $\frac{8x}{x^2-3x-6}=\frac{8}{t}$. Получаем уравнение $t-\frac{8}{t}=-2$. Это уравнение равносильно системе $\begin{cases}t^2+2t-8=0,\\ t\neq 0.\end{cases}$

Отсюда $t_1=-4$, $t_2=2$.

Теперь решение исходного уравнения сводится к решению двух уравнений:

1) $\frac{x^2-3x-6}{x}=-4;$

2) $\frac{x^2-3x-6}{x}=2.$

Решите эти уравнения самостоятельно.

Ответ: -3; -1; 2; 6. ◄

Пример 2. Решите уравнение $(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+9=0.$

Решение. Преобразуем это уравнение:

$(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+5+4=0;$

$(2x^2+3x-1)^2-5(2x^2+3x-1)+4=0.$

Пусть $2x^2+3x-1=t$. Тогда $t^2-5t+4=0$.

Отсюда $t_1=1$, $t_2=4$.

Следовательно, $2x^2+3x-1=1$ или $2x^2+3x-1=4$.

Решив эти два уравнения, получим ответ.

Ответ: -2; $\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{2}$; 1. ◄

Пример 3. Решите уравнение $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2.$

Решение. Выполнив проверку, легко убедиться, что число 0 не является корнем данного уравнения. Тогда, разделив обе части данного уравнения на x^2, перейдём к равносильному уравнению:

$$\frac{2x^2-3x+1}{x}\cdot\frac{2x^2+5x+1}{x}=9.$$

Отсюда $\left(2x-3+\frac{1}{x}\right)\left(2x+5+\frac{1}{x}\right)=9.$

Произведём замену: $2x+\frac{1}{x}-3=t$. Тогда $2x+5+\frac{1}{x}=t+8$. Получаем уравнение $t(t+8)=9$. Отсюда $t_1=1$, $t_2=-9$.

С учётом замены получаем два уравнения:

1) $2x + \frac{1}{x} - 3 = 1$;

2) $2x + \frac{1}{x} - 3 = -9$.

Решите эти уравнения самостоятельно.

Ответ: $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$, $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$. ◄

Пример 4. Решите уравнение $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$.

Решение. Пусть $x + \frac{1}{x} = t$. Тогда $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$. Отсюда $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$; $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Такая замена позволяет переписать исходное уравнение следующим образом:

$$7t - 2(t^2 - 2) = 9;$$
$$2t^2 - 7t + 5 = 0.$$

Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{5}{2}$.

Следовательно, $x + \frac{1}{x} = 1$ или $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$.

Решите эти уравнения самостоятельно.

Ответ: $\frac{1}{2}$; 2. ◄

Пример 5. Решите уравнение $(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2$.

Решение. С помощью проверки легко убедиться, что число 0 не является корнем данного уравнения. Тогда уравнение

$$\frac{(x^2 - 2x + 2)^2}{x^2} + \frac{3(x^2 - 2x + 2)}{x} = 10,$$

полученное в результате деления обеих частей исходного уравнения на x^2, равносильно исходному.

Замена $\frac{x^2 - 2x + 2}{x} = t$ приводит к квадратному уравнению

$t^2 + 3t - 10 = 0$.

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $2 - \sqrt{2}$; $2 + \sqrt{2}$; -1; -2. ◄

Может возникнуть вопрос: почему при решении примеров 1—5 мы не пытались упростить уравнения с помощью тождественных преобразований?

Дело в том, что использование тождественных преобразований привело бы к необходимости решать уравнение вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (вы можете в этом убедиться самостоятельно). При $a \neq 0$ такое уравнение называют **уравнением четвёртой степени**, при $a = 0$ и $b \neq 0$ — **уравнением третьей степени**. Частным случаем этого уравнения, когда $b = 0$ и $d = 0$, является биквадратное уравнение. Его вы решать умеете.

В общем случае для решения уравнений третьей и четвёртой степеней необходимо знать формулы нахождения их корней. С историей открытия этих формул вы можете ознакомиться в следующем рассказе.

Упражнения

Решите уравнение:

1) $\dfrac{3x^2 - 9x}{2} - \dfrac{12}{x^2 - 3x} = 3;$

2) $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{8}{(x-1)(x+4)} = 1;$

3) $x(x + 3)(x + 5)(x + 8) = 100;$

4) $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2;$

5) $7\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 9;$

6) $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1);$

7) $(x - 6)^4 + (x - 4)^4 = 82.$

Ответ: 1) -1; 1; 2; 4; 2) -3; 0; $\dfrac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$; 3) $-4 \pm \sqrt{21}$; 4) -6; -4; $\dfrac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$; 5) $\dfrac{1}{2}$; 2; 6) 2; 4; -1; $-\dfrac{1}{2}$; 7) 3; 7.

Секретное оружие Сципиона дель Ферро

Вы легко решите каждое из следующих уравнений третьей степени:
$x^3 - 8 = 0$, $x^3 + x^2 = 0$, $x^3 - x = 0$.

Все они являются частными случаями уравнения вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где x — переменная, a, b, c и d — некоторые числа, причём $a \neq 0$. Вывести формулу его корней — задача сложная. Недаром появление этой формулы считают выдающимся математическим открытием XVI в.

Первым открыл способ решения уравнения вида $x^3 + px = q$, где p и q — положительные числа, итальянский математик Сципион дель Ферро (1465–1526). Найденную формулу он хранил в секрете. Это было обусловлено тем, что карьера учёного того времени во многом зависела от его выступлений в публичных математических турнирах. Поэтому было выгодно

Никколо Тарталья

Джироламо Кардано

Нильс Хенрик Абель

хранить открытия в тайне, рассчитывая использовать их в математических соревнованиях как «секретное оружие».

После смерти дель Ферро его ученик Фиоре, владея секретной формулой, вызвал на математический поединок талантливого математика-самоучку Никколо Тарталью (1499—1557). За несколько дней до турнира Тарталья сам вывел формулу корней уравнения третьей степени. Диспут, на котором Тарталья одержал убедительную победу, состоялся 20 февраля 1535 г.

Впервые секретная формула была опубликована в книге известного итальянского учёного Джироламо Кардано (1501—1576) «Великое искусство». В этой работе также описан метод решения уравнения четвёртой степени, открытый Лудовико Феррари (1522—1565).

В XVII–XVIII вв. усилия многих ведущих математиков были сосредоточены на поиске формулы для решения уравнений пятой степени. Получению результата способствовали работы итальянского математика Паоло Руффини (1765—1822) и норвежского математика Нильса Хенрика Абеля (1802—1829). Сам результат оказался абсолютно неожиданным: было доказано, что не существует формулы, с помощью которой можно выразить корни любого уравнения пятой степени и выше через коэффициенты уравнения, используя лишь четыре арифметических действия и действие извлечения корня.

§ 24. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций

В § 7 вы уже познакомились с задачами, в которых рациональные уравнения служили математическими моделями реальных ситуаций. Теперь, когда вы научились решать квадратные уравнения, можно существенно расширить класс рассматриваемых задач.

<u>Пример 1.</u> Из пункта A выехал велосипедист, а через 45 мин после него в том же направлении выехал грузовик, догнавший велосипедиста на расстоянии 15 км от пункта A. Найдите скорость велосипедиста и скорость грузовика, если скорость грузовика на 18 км/ч больше скорости велосипедиста.

Решение. Пусть скорость велосипедиста равна x км/ч, тогда скорость грузовика составляет $(x + 18)$ км/ч. Велосипедист проезжает 15 км за $\frac{15}{x}$ ч, а грузовик — за $\frac{15}{x+18}$ ч. Поскольку грузовик проехал 15 км на 45 мин, то есть на $\frac{3}{4}$ ч, быстрее, чем велосипедист, то получаем уравнение $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4}$.

Решим это уравнение:

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{5}{x} - \frac{5}{x+18} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{20x + 360 - 20x - x^2 - 18x}{4x(x+18)} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + 18x - 360 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -18. \end{cases}$$

Решив квадратное уравнение системы, получим $x = 12$ или $x = -30$.

Корень -30 не удовлетворяет условию задачи.

Следовательно, скорость велосипедиста равна 12 км/ч, а скорость грузовика составляет $12 + 18 = 30$ (км/ч).

Ответ: 12 км/ч, 30 км/ч. ◄

<u>Пример 2.</u> Одна бригада работала на ремонте дороги 7 ч, после чего к ней присоединилась вторая бригада. Через 2 ч их совместной работы ремонт был завершён. За сколько часов может отремонтировать дорогу каждая бригада, работая самостоятельно, если первой для этого требуется на 4 ч больше, чем второй?

Решение. Пусть первая бригада может самостоятельно отремонтировать дорогу за x ч, тогда второй для этого нужно $(x - 4)$ ч. За 1 ч первая бригада ремонтирует $\frac{1}{x}$ часть дороги, а вторая — $\frac{1}{x-4}$ часть дороги. Первая бригада работала 9 ч и отремонтировала $\frac{9}{x}$ дороги, а вторая бригада работала 2 ч и отремонтировала соответственно $\frac{2}{x-4}$ дороги. Поскольку в результате была отремонтирована вся дорога, то $\frac{9}{x} + \frac{2}{x-4} = 1$.

Полученное уравнение имеет два корня $x_1 = 12$ и $x_2 = 3$ (убедитесь в этом самостоятельно). Второй корень не удовлетворяет условию задачи, поскольку тогда вторая бригада должна была бы отремонтировать дорогу за $3 - 4 = -1$ (ч), что не имеет смысла. Следовательно, первая бригада может отремонтировать дорогу за 12 ч, а вторая — за 8 ч.

Ответ: 12 ч, 8 ч. ◄

Пример 3. Водный раствор соли содержал 120 г воды. После того как в раствор добавили 10 г соли, его концентрация увеличилась на 5 %. Сколько граммов соли содержал раствор первоначально?

Решение. Пусть исходный раствор содержал x г соли. Тогда его масса была равна $(x + 120)$ г, а концентрация соли составляла $\frac{x}{x+120}$. После того как к раствору добавили 10 г соли, её масса в растворе составила $(x + 10)$ г, а масса раствора — $(x + 130)$ г. Теперь концентрация соли составляет $\frac{x+10}{x+130}$, что на 5 %, то есть на $\frac{1}{20}$, больше, чем $\frac{x}{x+120}$. Отсюда получаем $\frac{x+10}{x+130} - \frac{x}{x+120} = \frac{1}{20}$.

Полученное уравнение имеет два корня: $x_1 = 30$ и $x_2 = -280$ (убедитесь в этом самостоятельно), из которых второй корень не удовлетворяет условию задачи.

Следовательно, раствор содержал первоначально 30 г соли.

Ответ: 30 г. ◄

Упражнения

802. Первые 150 км дороги из города A в город B автомобиль проехал с некоторой скоростью, а остальные 240 км — со скоростью на 5 км/ч большей. Найдите первоначальную скорость автомобиля, если на весь путь из города A в город B он потратил 5 ч.

803. Первый мотоциклист проезжает 90 км на 18 мин быстрее второго, поскольку его скорость на 10 км/ч больше скорости второго мотоциклиста. Найдите скорость каждого мотоциклиста.

804. Из одного города в другой, расстояние между которыми равно 240 км, выехали одновременно автобус и автомобиль. Автобус двигался со скоростью на 20 км/ч меньшей, чем автомобиль, и прибыл в пункт назначения на 1 ч позже автомобиля. Найдите скорость автомобиля и скорость автобуса.

805. Поезд опаздывал на 10 мин. Чтобы прибыть на станцию назначения вовремя, он за 80 км от этой станции увеличил свою скорость на 16 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

806. Из села Вишнёвое в село Яблоневое, расстояние между которыми равно 15 км, всадник проскакал с некоторой скоростью. Возвращался он со скоростью на 3 км/ч большей и потратил на обратный путь на 15 мин меньше, чем на путь из Вишнёвого в Яблоневое. Найдите первоначальную скорость всадника.

807. Наборщик должен был за некоторое время набрать 180 страниц. Однако он выполнил эту работу на 5 ч раньше срока, так как набирал на 3 страницы в час больше, чем планировал. Сколько страниц в час он должен был набирать?

808. Первый насос перекачивает 90 $м^3$ воды на 1 ч быстрее, чем второй 100 $м^3$. Сколько воды за 1 ч перекачивает каждый насос, если первый перекачивает за 1 ч на 5 $м^3$ воды больше, чем второй?

809. Рабочий должен был за определённое время изготовить 72 детали. Однако ежедневно он изготавливал на 4 детали больше, чем планировал, и закончил работу на 3 дня раньше срока. За сколько дней он выполнил работу?

810. Катер прошёл 16 км по течению реки и 30 км против течения, затратив на весь путь 1 ч 30 мин. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки составляет 1 км/ч.

811. Лодка проплыла 15 км по течению реки и вернулась, затратив на обратный путь на 1 ч больше. Найдите скорость лодки по течению реки, если скорость течения составляет 2 км/ч.

812. По течению реки от пристани отплыл плот. Через 4 ч от этой пристани в том же направлении отчалила лодка, догнавшая плот на расстоянии 15 км от пристани. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки составляет 12 км/ч.

813. Катер прошёл 45 км по течению реки и 28 км против течения, потратив на весь путь 4 ч. Найдите скорость течения, если собственная скорость катера составляет 18 км/ч.

814. Турист проплыл $\frac{5}{8}$ всего пути на катере, а остальную часть проехал на автомобиле. Скорость автомобиля на 20 км/ч больше скорости катера. На автомобиле он ехал на 1 ч 30 мин меньше, чем плыл на катере. Найдите скорость автомобиля и скорость катера, если всего турист преодолел 160 км.

815. Междугородный автобус должен был проехать 72 км. После того как он проехал 24 км, его задержали на железнодорожном переезде на 12 мин. Потом он увеличил скорость на 12 км/ч и прибыл в пункт назначения с опозданием на 4 мин. Найдите первоначальную скорость автобуса.

816. Группа школьников выехала на экскурсию из города A в город B на автобусе, а вернулась в город A по железной дороге, затратив на обратный путь на 30 мин больше, чем на путь в город B. Найдите скорость поезда, если она на 20 км/ч меньше скорости автобуса, длина шоссе между городами A и B составляет 160 км, а длина железной дороги — 150 км.

817. Турист проплыл на байдарке 4 км по озеру и 5 км по течению реки за то же время, за которое он проплыл бы 6 км против течения. С какой скоростью турист плыл по озеру, если скорость течения реки равна 2 км/ч?

818. Теплоход прошёл 16 км по озеру, а затем 18 км по реке, берущей начало из этого озера, за 1 ч. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения реки составляет 4 км/ч.

819. Знаменатель обыкновенной дроби на 3 больше её числителя. Если числитель этой дроби увеличить на 4, а знаменатель — на 8, то полученная дробь будет на $\frac{1}{6}$ больше исходной. Найдите исходную дробь.

820. Числитель обыкновенной дроби на 5 меньше её знаменателя. Если числитель этой дроби уменьшить на 3, а знаменатель увеличить на 4, то полученная дробь будет на $\frac{1}{3}$ меньше исходной. Найдите исходную дробь.

821. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить производственное задание за 20 дней. За сколько дней может выполнить это задание каждый из них, работая самостоятельно, если одному из них нужно для этого на 9 дней больше, чем другому?

822. Одному маляру требуется на 5 ч больше, чем другому, чтобы покрасить фасад дома. Когда первый маляр проработал 3 ч, а потом его сменил второй маляр, проработавший 2 ч, то оказалось, что покрашено 40 % фасада. За какое время может покрасить фасад каждый маляр, работая самостоятельно?

823. В первый день тракторист пахал поле 6 ч. На следующий день к нему присоединился второй тракторист, и через 8 ч совместной работы они закончили вспашку. За какое время может вспахать это поле каждый тракторист, работая самостоятельно, если первому для этого надо на 3 ч меньше, чем второму?

824. В раствор, содержащий 20 г соли, добавили 100 г воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 10 %. Сколько граммов воды содержал раствор первоначально?

825. Кусок сплава меди и цинка, содержавший 10 кг цинка, сплавили с 10 кг меди. Полученный сплав содержит на 5 % меди больше, чем исходный. Сколько килограммов меди содержал исходный кусок сплава?

826. Через 2 ч 40 мин после отправления плота от пристани A по течению реки навстречу ему от пристани B отошёл катер. Найдите скорость течения реки, если плот и катер встретились на расстоянии 14 км от пристани A, скорость катера в стоячей воде равна 12 км/ч, а расстояние между пристанями A и B равно 32 км.

827. К бассейну подведены две трубы. Через одну трубу воду наливают в бассейн, а через другую сливают, причём на слив воды требуется на 1 ч больше, чем на его наполнение. Если же открыть обе трубы одновременно, то бассейн наполнится водой за 30 ч. За сколько часов можно наполнить пустой бассейн водой через первую трубу?

828. Для наполнения бассейна через первую трубу требуется столько же времени, сколько для наполнения через вторую и третью трубы одновременно. Через первую трубу бассейн наполняется на 2 ч быстрее, чем через вторую, и на 8 ч быстрее, чем через третью. Сколько времени требуется для наполнения бассейна через каждую трубу?

829. Автобус должен был проехать расстояние между двумя городами, равное 400 км, с некоторой скоростью. Проехав 2 ч с запланированной скоростью, он остановился на 20 мин и, чтобы прибыть в пункт назначения вовремя, увеличил скорость движения на 10 км/ч. С какой скоростью автобус должен был проехать расстояние между городами?

830. Рабочий должен был за некоторое время изготовить 360 деталей. Первые 5 дней он ежедневно изготавливал запланированное количество деталей, а затем ежедневно изготавливал на 4 детали больше, и уже за день до срока изготовил 372 детали. Сколько деталей ежедневно должен был изготавливать рабочий по плану?

831. Чтобы выполнить некоторое производственное задание, одному рабочему требуется на 12 ч меньше, чем другому, и на 4 ч больше, чем обоим рабочим для совместного выполнения задания. За сколько часов может выполнить это задание первый рабочий?

Упражнения для повторения

832. Вычислите:

1) $(27 \cdot 3^{-4})^2$; 2) $\dfrac{7^{-4} \cdot 7^{-9}}{7^{-12}}$; 3) $(10^9)^2 \cdot 1000^{-6}$.

833. Найдите значение выражения $a^2 - 2\sqrt{5}a + 2$ при $a = \sqrt{5} - 3$.

834. Постройте график функции $y = -2x + 4$.

1) Чему равен нуль данной функции?
2) Укажите значения x, при которых $y > 0$.
3) Проходит ли график функции через точку M $(-36; 68)$?

835. При каком значении k график функции $y = \dfrac{k}{x}$ проходит через точку $A\left(-\sqrt{12}; \sqrt{3}\right)$? Постройте этот график.

836. Какое из равенств верно: $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} = \sqrt{3} - 2$ или $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} = 2 - \sqrt{3}$? Ответ обоснуйте.

837. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{1}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}$; 2) $\left(\dfrac{a^4}{b^{-5}}\right)^{-3}$; 3) $(0{,}2a^{-1}b^2)^2 \cdot 4a^5b^{-4}$.

Учимся делать нестандартные шаги

838. На тарелке лежит 9 кусочков сыра разной массы. Докажите, что можно один из кусочков сыра разрезать на две части так, что полученные 10 кусочков можно будет разложить на две тарелки и при этом масса сыра на каждой из них будет одинаковой.

Когда сделаны уроки

Элементы математической логики

В физике, химии, биологии, экономике, социологии и других науках об истинности утверждений можно судить, основываясь на результатах наблюдений и экспериментов. В этом отношении математика — наука иного рода. Например, то, что сумма углов треугольника равна 180°, невозможно определить лабораторным путём. Истинность математических утверждений может быть доказана только в результате логически безупречных рассуждений.

Науку, которая изучает такие математические доказательства (логически безупречные рассуждения), называют **математической логикой**. Следовательно, математическая логика учит, как надо рассуждать, чтобы получать верные выводы.

Рассуждая, мы формулируем свои мысли в виде утверждений.

Рассмотрим примеры.

1. Если треугольник равносторонний, то центры его вписанной и описанной окружностей совпадают.

2. Поэзия Марины Цветаевой сложна для восприятия.
3. Число π является рациональным.
4. Юрий Гагарин – первый человек, совершивший полёт в космос.
5. Число n является простым.

Утверждения 1 и 4 являются **истинными**, утверждение 3 – **ложным**. Утверждения 2 и 5 нельзя отнести ни к истинным, ни к ложным.

Любое утверждение, относительно которого имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно, называют **высказыванием**.

Следовательно, утверждения 1, 3, 4 являются высказываниями, а утверждения 2 и 5 высказываниями не являются.

Высказывания обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D и т. д.

Например, пишут:

$A \equiv$ {Москва – столица России};

$B \equiv \{5 > 7\}$;

$C \equiv$ {число 2 – простое}.

Любое высказывание является или истинным, или ложным. Если высказывание A истинно, то будем говорить, что ему поставлено в соответствие число 1, если высказывание A ложно – то число 0.

С помощью логических связок, а именно слов «и», «или», «если... то», «тогда и только тогда» и т. п., из имеющихся высказываний можно строить более сложные высказывания.

Например, если даны два высказывания

$$A \equiv \{5 > 3\},\ B \equiv \{5 = 3\},$$

то высказывание $C \equiv \{5 \geqslant 3\}$ образовано из высказываний A и B с помощью союза «или».

Примерами сложных высказываний могут также служить теоремы. Со структурами и видами теорем вы можете ознакомиться в курсе геометрии 8 класса.

Рассмотрим высказывание $C \equiv \{10 \vdots 5$ и $10 \vdots 2\}$. Оно составлено из двух высказываний: $A \equiv \{10 \vdots 5\}$ и $B \equiv \{10 \vdots 2\}$ с помощью союза «и». Высказывание C называют **конъюнкцией** высказываний A и B.

Определение

Конъюнкцией (или логическим произведением) двух высказываний A и B называют высказывание, которое истинно, если каждое из высказываний A и B истинно, и ложно, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкцию высказываний A и B обозначают так: $A \wedge B$ (читают: «A и B» или «A конъюнкция B»).

Возвращаясь к рассмотренному выше примеру, можно сказать, что высказывание C является высказыванием $A \wedge B$.

Также говорят, что высказывание C получено из высказываний A и B в результате **логической операции** конъюнкции.

Понятно, что истинность или ложность высказывания $A \wedge B$ зависит от истинности или ложности высказываний A и B. Эту зависимость удобно представить в виде таблицы, которую называют **таблицей истинности**. Так, таблица истинности для логической операции конъюнкции имеет такой вид:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Конъюнкция соответствует логической связке «и». Определим ряд других логических операций, которые соответствуют чаще всего употребляемым способам образования высказываний в обыденной речи.

Определение

Дизъюнкцией (или логической суммой) двух высказываний A и B называют высказывание, которое истинно, если хотя бы одно из высказываний A или B истинно, и ложно, если они оба ложны.

Дизъюнкцию высказываний A и B обозначают так: $A \vee B$ (читают: «A или B» или «A дизъюнкция B»).

Пусть $A \equiv$ {в понедельник первым уроком в расписании является физика},

$B \equiv$ {в понедельник первым уроком в расписании является математика}.

Тогда $A \vee B \equiv$ {в понедельник первым уроком в расписании является физика или математика}.

Приведём таблицу истинности для дизъюнкции:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Многие теоремы имеют такую логическую структуру:

если выполняются некоторые условия, *то* можно сделать некоторый вывод.

Логическую связку «если... то» употребляют и в других науках, а также в повседневной жизни. Определим соответствующую логическую операцию.

Определение

Импликацией (или логическим следованием) двух высказываний A и B называют такое высказывание $A \Rightarrow B$ (читают: «если A, то B»), которое ложно при условии, что высказывание A истинно, а высказывание B ложно, а во всех остальных случаях оно истинно.

В импликации $A \Rightarrow B$ высказывание A называют **условием**, а высказывание B — **выводом**.

Приведём таблицу истинности для импликации:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Заметим, что первые две строки этой таблицы полностью соответствуют нашему бытовому пониманию слова «следует»: если из истины следует истина, то это правильно (первая строка таблицы); если из истины следует ложь, то это неправильно (вторая строка таблицы).

Третья и четвёртая строки показывают, что импликация не полностью соответствует логике, которой мы придерживаемся в бытовом разговорном языке. Вряд ли в повседневной жизни мы руководствуемся таким: «если из лжи следует правда или из лжи следует ложь, то такие высказывания истинны».

Например, в силу определения импликации каждое из высказываний

$$\{\text{если } 2 \times 2 = 5, \text{ то Волга впадает в Каспийское море}\}$$

и

$$\{\text{если } 2 \times 2 = 5, \text{ то Волга впадает в Белое море}\}$$

истинно.

Вместе с тем понять целесообразность принятого определения импликации помогает такой пример.

Пусть x — целое число. Утверждение «если $x \vdots 10$, то $x \vdots 5$», безусловно, истинно во всех случаях.

Если подставить $x = 1$, то получим истинное высказывание «если $1 \vdots 10$, то $1 \vdots 5$», иллюстрирующее четвёртую строку таблицы.

Если подставить $x = 5$, то получим истинное высказывание «если $5 \vdots 10$, то $5 \vdots 5$», иллюстрирующее третью строку таблицы.

Определение

Эквивалентностью (или двойной импликацией) двух высказываний A и B называют высказывание, которое истинно, если оба высказывания A и B истинны или оба ложны, и ложно, если одно из них истинно, а другое ложно.

Эквивалентность высказываний A и B обозначают так: $A \Leftrightarrow B$ (читают: «A эквивалентно B» или «A тогда и только тогда, если B»).

Приведём таблицу истинности для эквивалентности:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Рассмотрим два высказывания:

$$A \equiv \{2 = 5\} \text{ и } B \equiv \{2 > 5\}.$$

Эквивалентность $A \Leftrightarrow B \equiv \{2 = 5$ тогда и только тогда, если $2 > 5\}$ является истинным высказыванием, так как оба высказывания A и B ложны.

Рассмотрим логическую операцию, соответствующую частице «не» в обыденной речи.

Определение

Отрицанием высказывания A называют высказывание, которое истинно, если высказывание A ложно, и ложно, если высказывание A истинно.

Отрицание высказывания A обозначают так: $\overline{A}$ (читают: «не A» или «неверно, что A»).

Приведём таблицу истинности для отрицания:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Комбинируя между собой логические операции, можно получить **логические выражения**. Записи $A \wedge B$, $(A \vee B) \wedge C$, $\overline{A \Rightarrow B}$, $A \Leftrightarrow \overline{B}$ являются примерами логических выражений.

Пример. Составьте таблицу истинности для выражения $(A \wedge B) \vee C$.
Решение. Имеем:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

Определение

Высказывания A и B называют логически эквивалентными, если они или оба истинны, или оба ложны.

Пишут $A = B$.

Иными словами: $A = B$ тогда и только тогда, если $A \Leftrightarrow B$ является истинным высказыванием.

Покажем, например, что $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$ для любых высказываний A и B. Для этого составим таблицу истинности для выражения $\overline{A} \vee B$ и сравним её с таблицей истинности для импликации $A \Rightarrow B$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Столбики, соответствующие логическим выражениям $A \Rightarrow B$ и $\overline{A} \vee B$, совпадают. Это означает, что эти высказывания логически эквивалентны.

Логические операции обладают целым рядом свойств. Например,

$$A \vee B = B \vee A.$$

В этом легко убедиться, сравнив таблицы истинности для выражений $A \vee B$ и $B \vee A$.

Также несложно установить, что, например,

$$A \wedge B = B \wedge A,$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C).$$

Свойства логических операций позволяют одно истинное высказывание заменить другим высказыванием, ему логически эквивалентным. Это позволяет строить общие схемы верных логических рассуждений, что, собственно, и составляет предмет математической логики.

Отметим, что математическая логика, как правило, не занимается выяснением истинности одного отдельно взятого высказывания (например, определить, впадает ли Волга в Каспийское море, — дело географии, а не логики). В то же время вопрос об истинности разнообразных логических выражений занимает важное место в этой науке. Поэтому в математической логике особую роль играют те логические выражения, которые всегда являются истинными, независимо от истинности высказываний, из которых они образованы. Такие логические выражения называют **тождественно истинными** или **тавтологиями**.

Рассмотрим выражение $A \vee \overline{A}$ и составим для него таблицу истинности:

A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$
1	0	1
0	1	1

Третий столбик таблицы показывает, что выражение $A \vee \overline{A}$ является тавтологией, которую называют **законом исключения третьего**. Этот закон совершенно понятен с точки зрения повседневного опыта. Он утверждает, что одно из двух высказываний, A или $\overline{A}$, истинно.

Подчеркнём, что тавтологии позволяют нам строить истинные высказывания, поэтому они наиболее интересны для логики.

Интересно отметить, что математическая логика сыграла существенную роль в создании компьютеров.

Наверное, вы слышали, что современные компьютеры в своей работе основываются не на десятичной системе счисления, к которой мы привыкли, а на так называемой двоичной системе счисления, когда каждое число кодируется последовательностью нулей и единиц[1]. Управление работой компьютера выполняется с помощью команд, которые также кодируются нулями и единицами. Аппарат математической логики оказался необычайно удобен, потому что каждое логическое высказывание также характеризуется нулём или единицей: истинному высказыванию ставим в соответствие единицу, ложному высказыванию — нуль.

Рис. 44

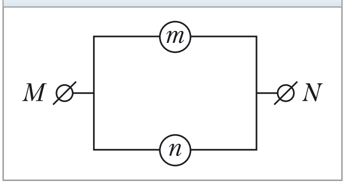
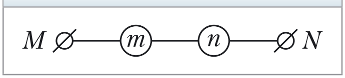


Рис. 45



Для реализации операций над высказываниями в первых компьютерах использовались электрические схемы. Например, для операций дизъюнкции и конъюнкции можно использовать электрические схемы, изображённые соответственно на рисунках 44 и 45

[1] Технически реализовать такое кодирование довольно просто: поданное на провод напряжение означает единицу, а отсутствие напряжения — нуль.

(в современных компьютерах электрические схемы заменены полупроводниковыми микросхемами).

Какие же электрические схемы соответствуют другим логическим выражениям, например импликации? Существуют ли такие схемы вообще? И если существуют, то как их найти?

Оказывается, для построения электрических аналогов любых (даже самых сложных) логических выражений можно обойтись только схемами для дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Эмиль Леон Пост
1897—1954

В заключение отметим, что математик Эмиль Леон Пост нашёл простые общие условия, позволяющие дать ответ на вопрос, можно ли произвольную таблицу истинности выразить через набор заданных логических выражений. С этой чудесной теоремой вы ознакомитесь, если продолжите изучать математику в университете.

Упражнения

1. Какие из данных предложений являются высказываниями:
1) $5 > 5$;
2) $x < 5$;
3) что больше, $\sin 30^\circ$ или $\cos 45^\circ$;
4) если четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$;
5) число 1 не является ни простым, ни составным;
6) неверно, что 5 — действительное число;
7) все кошки серые?

2. Даны два высказывания:
$$A \equiv \{5 < 6\},\ B \equiv \{6 \text{ — простое число}\}.$$
Определите, истинным или ложным является высказывание:
1) $A \wedge B$; 3) $A \Rightarrow B$; 5) $\overline{A}$;
2) $A \vee B$; 4) $A \Leftrightarrow B$; 6) $\overline{B}$.

3. Составьте таблицу истинности для логического выражения:
1) $\overline{A} \Rightarrow B$; 3) $(A \wedge B) \Rightarrow C$; 5) $(A \wedge \overline{C}) \Rightarrow B$.
2) $(A \vee B) \wedge C$; 4) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \vee C)$;

4. Докажите, что:
1) $\overline{\overline{A}} = A$; 4) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
2) $A \wedge A = A$; 5) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$;
3) $A \vee B = B \vee A$; 6) $(A \Rightarrow B) = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Задание № 6 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Найдите корни квадратного трёхчлена $5x^2 - x - 6$.

А) 2; –0,6 Б) –2; 0,6 В) 1; –1,2 Г) –1; 1,2

2. Разложите на множители квадратный трёхчлен $-x^2 - 4x + 5$.

А) $(x - 1)(x + 5)$ В) $-(x - 1)(x + 5)$

Б) $(x + 1)(x - 5)$ Г) $-(x + 1)(x - 5)$

3. Сократите дробь $\dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + x - 6}$.

А) $\dfrac{x+4}{x-2}$ Б) $\dfrac{x-4}{x-2}$ В) $\dfrac{x+4}{x+2}$ Г) $\dfrac{x-4}{x+2}$

4. Решите уравнение $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$.

А) –3; 3 Б) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ В) –3; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 3 Г) $\sqrt{2}$; 3

5. Найдите корни уравнения $(x^2 - 4x)^2 - 2(x^2 - 4x) - 15 = 0$.

А) –1; 1; 3; 5 Б) –1; 5 В) 1; 3 Г) 1; 3; 5

6. Решите уравнение $x - \sqrt{x} - 12 = 0$.

А) –3; 4 Б) –2; 2 В) 16 Г) 9; 16

7. Решите уравнение $\dfrac{x^2 - 6}{x - 3} = \dfrac{x}{x - 3}$.

А) –2 Б) 3 В) –2; 3 Г) –3; 2

8. Решите уравнение $\dfrac{3x - 1}{x} - \dfrac{4}{x - 2} = \dfrac{10 - 9x}{x^2 - 2x}$.

А) $-\dfrac{4}{3}$; 2 Б) $\dfrac{4}{3}$; –2 В) $-\dfrac{4}{3}$ Г) 2

9. Из одного города в другой, расстояние между которыми равно 350 км, выехали одновременно грузовой и легковой автомобили. Скорость грузовика на 20 км/ч меньше скорости легкового автомобиля, в результате чего грузовик прибыл в пункт назначения на 2 ч позже легкового автомобиля.

Пусть скорость грузового автомобиля равна x км/ч. Какое из уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии задачи?

А) $\dfrac{350}{x} - \dfrac{350}{x + 20} = 2$ В) $\dfrac{350}{x + 20} - \dfrac{350}{x} = 2$

Б) $\dfrac{350}{x} + \dfrac{350}{x + 20} = 2$ Г) $\dfrac{350}{x} - \dfrac{350}{x - 20} = 2$

10. Катер прошёл 30 км по течению реки и вернулся обратно, затратив на весь путь 3 ч 10 мин. Скорость течения реки равна 1 км/ч. Пусть собственная скорость катера составляет x км/ч. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А) $\dfrac{30}{x+1} + \dfrac{30}{x-1} = 3{,}1$ В) $\dfrac{30}{x+1} + \dfrac{30}{x} = 3\dfrac{1}{6}$

Б) $\dfrac{30}{x+1} - \dfrac{30}{x-1} = 3{,}1$ Г) $\dfrac{30}{x+1} + \dfrac{30}{x-1} = 3\dfrac{1}{6}$

11. Рабочий должен был за некоторое время изготовить 96 деталей. Ежедневно он изготавливал на 2 детали больше, чем планировал, и закончил работу на 3 дня раньше срока.
Пусть рабочий изготавливал ежедневно x деталей. Какое из уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии задачи?

А) $\dfrac{96}{x} - \dfrac{96}{x-2} = 3$ В) $\dfrac{96}{x} - \dfrac{96}{x-3} = 2$

Б) $\dfrac{96}{x-2} - \dfrac{96}{x} = 3$ Г) $\dfrac{96}{x-3} - \dfrac{96}{x} = 2$

12. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторое производственное задание за 10 ч, причём первый из них может выполнить это задание самостоятельно на 15 ч быстрее второго.
Пусть первый рабочий может выполнить самостоятельно задание за x ч. Какое из уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии задачи?

А) $\dfrac{15}{x} + \dfrac{15}{10-x} = 1$ В) $\dfrac{10}{x} + \dfrac{10}{x+15} = 1$

Б) $\dfrac{15}{x} + \dfrac{15}{x-10} = 1$ Г) $\dfrac{10}{x} + \dfrac{10}{x-15} = 1$

Итоги главы 3

Уравнение первой степени

Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют уравнением первой степени.

Квадратное уравнение

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют квадратным уравнением.

Приведённое квадратное уравнение

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называют приведённым.

Неполное квадратное уравнение

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют неполным квадратным уравнением.

Решение неполного квадратного уравнения

Коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$	Неполное квадратное уравнение	Корни
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0$, $c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0$, $-\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Корней нет
$b = 0$, $-\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Дискриминант квадратного уравнения

Для уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, его дискриминант D — это значение выражения $b^2 - 4ac$.

Решение квадратного уравнения

Если $D < 0$, то квадратное уравнение корней не имеет.

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня x_1 и x_2: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема, обратная теореме Виета

Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ и $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Квадратный трёхчлен

Многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют квадратным трёхчленом.

Разложение на множители квадратного трёхчлена с положительным дискриминантом

Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положительный, то данный трёхчлен можно разложить на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена.

Биквадратное уравнение

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют биквадратным уравнением.

Упражнения для повторения курса алгебры 8 класса

839. Найдите значение выражения:

1) $\frac{3m-n}{m+2n}$, если $m=-4$, $n=3$;
2) $\frac{a^2-2a}{4a+2}$, если $a=-0{,}8$.

840. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $7b-11$;
2) $\frac{9}{x}$;
3) $\frac{5}{2-y}$;
4) $\frac{m-3}{7}$;
5) $\frac{3+t}{4-t}$;
6) $\frac{2x}{x-1}-\frac{3}{x-6}$;
7) $\frac{5}{x^8+3}$;
8) $\frac{x-2}{|x|+7}$;
9) $\frac{4}{x^2-25}$;
10) $\frac{3}{|x|-5}$;
11) $\frac{x}{8+\frac{4}{x}}$;
12) $\frac{5}{6-\frac{2}{x}}$;
13) $\frac{1}{(x-3)(x-4)}$;
14) $\frac{x+8}{(x+8)(x-3)}$?

841. Сократите дробь:

1) $\frac{8a^2c^3}{4a^3c^2}$;
2) $\frac{25mn^2}{75m^8n}$;
3) $\frac{60a^3bc^2d^5}{18a^4b^2c^6d}$;
4) $\frac{42x^8y^9}{14x^6y^3}$.

842. Представьте частное в виде дроби и сократите полученную дробь:

1) $4mn^2p:(28m^2np^6)$;
2) $-30x^5y^3:(36x^4y^8)$;
3) $-63xy^9:(-72xy^7)$.

843. Сократите дробь:

1) $\frac{3x-6y}{3x}$;
2) $\frac{3a+9b}{4a+12b}$;
3) $\frac{a^2-49}{3a+21}$;
4) $\frac{12x^2-4x}{2-6x}$;
5) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$;
6) $\frac{b^7+b^4}{b^2+b^5}$;
7) $\frac{a^3+64}{3a+12}$;
8) $\frac{xb-5y+5b-xy}{x^2-25}$;
9) $\frac{7m^2-7m+7}{14m^3+14}$;
10) $\frac{a^2+bc-b^2+ac}{ab+c^2+ac-b^2}$;
11) $\frac{20mn^2-20m^2n+5m^3}{10mn-5m^2}$;
12) $\frac{x^2-yz+xz-y^2}{x^2+yz-xz-y^2}$.

844. Найдите значение выражения:

1) $\frac{x^5y^7-x^3y^9}{x^3y^7}$, если $x=-0{,}2$, $y=0{,}5$;

2) $\frac{4a^2-36}{5a^2-30a+45}$, если $a=2$;

3) $\frac{(3a+3b)^2}{3a^2-3b^2}$, если $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{6}$;

4) $\frac{20x^2-140xy+245y^2}{4x-14y}$, если $2x-7y=-0{,}5$.

845. Сократите дробь (n — натуральное число):

1) $\frac{100^n}{2^{2n+3}\cdot 5^{2n+1}}$;
3) $\frac{5^{n+1}-5^n}{2\cdot 5^n}$;
5) $\frac{41\cdot 9^n}{9^{n+2}+9^n}$.
2) $\frac{2^{2n+1}\cdot 7^{n+1}}{6\cdot 28^n}$;
4) $\frac{18^n}{3^{2n+2}\cdot 2^{n+3}}$;

846. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $(a+2)x=7$;
3) $(a+3)x=a^2+6a+9$;
2) $(a+6)x=a+6$;
4) $(a^2-4)x=a-2$.

847. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{7a}{22}+\frac{4a}{22}$;
4) $\frac{x+y}{9p}-\frac{x}{9p}$;
7) $\frac{6a^2-4a}{15a}-\frac{a^2+a}{15a}$;
2) $\frac{8x}{3y}-\frac{5x}{3y}$;
5) $\frac{a}{8}-\frac{a-b}{8}$;
8) $\frac{x-y}{8}+\frac{x+y}{8}$;
3) $\frac{7x-2y}{15p}+\frac{3x+7y}{15p}$;
6) $\frac{7p-17}{5k}+\frac{7-2p}{5k}$;
9) $\frac{10x-6}{x}-\frac{4x+11}{x}$.

848. Упростите выражение:

1) $\frac{7y}{y^2-4}-\frac{14}{y^2-4}$;
5) $\frac{(3a-1)^2}{4a-4}+\frac{(a-3)^2}{4-4a}$;
2) $\frac{y^2-3y}{25-y^2}-\frac{7y-25}{25-y^2}$;
6) $\frac{x^2-3x}{(2-x)^2}-\frac{x-4}{(x-2)^2}$;
3) $\frac{9p+5}{3p+6}-\frac{10p-12}{3p+6}+\frac{9p-1}{3p+6}$;
7) $\frac{7}{a-2}-\frac{b}{2-a}$;
4) $\frac{7x+5}{3-x}+\frac{5x+11}{x-3}$;
8) $\frac{6a}{5-a}-\frac{4a}{a-5}$.

849. Выполните действия:

1) $\frac{8}{x}-\frac{5}{y}$;
3) $\frac{5}{24xy}-\frac{7}{18xy}$;
2) $\frac{7}{ab}+\frac{5}{b}$;
4) $\frac{5b^2-8b+1}{a^2b^2}-\frac{2b-1}{a^2b}$.

850. Выполните действия:

1) $\frac{2a-1}{a-4}-\frac{3a+2}{2(a-4)}$;
2) $\frac{x+2}{3x+9}-\frac{4-x}{5x+15}$;
3) $\frac{m+1}{m-3}-\frac{m+2}{m+3}$;

4) $\frac{x}{x+y}-\frac{2y^2}{y^2-x^2}-\frac{y}{x-y}$;

5) $\frac{m}{3m-2n}-\frac{3m^2-3mn}{9m^2-12m+4n^2}$;

6) $\frac{a+3}{a^2-2a}-\frac{a-2}{5a-10}+\frac{a+2}{5a}$;

7) $\frac{3}{3a-3}-\frac{a-1}{2a^2-4a+2}$;

8) $2-\frac{14}{m-2}-m$;

9) $\frac{2x+1}{x^2-6x+9}-\frac{8}{x^2-9}-\frac{2x-1}{x^2+6x+9}$.

851. Докажите тождество:

$$\frac{1}{(b-c)(c-a)}-\frac{1}{(a-b)(c-b)}+\frac{1}{(a-c)(b-a)}=0.$$

852. Запишите дробь в виде суммы целого выражения и дроби:

1) $\frac{a-7}{a}$; 2) $\frac{a^2+2a-2}{a+2}$; 3) $\frac{x^2+3x-2}{x-3}$.

853. Известно, что $\frac{x}{y}=4$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{x+y}{x}$; 2) $\frac{3x+4y}{x}$.

854. Найдите все натуральные значения n, при которых является натуральным числом значение выражения:

1) $\frac{12n^2-5n+33}{n}$; 2) $\frac{n^3-6n^2+54}{n^2}$; 3) $\frac{10-4n}{n}$; 4) $\frac{12-3n}{n}$.

855. Выразите переменную x через другие переменные, если:

1) $x+\frac{a}{b}=1$; 2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=b$; 3) $\frac{a}{b}+\frac{x}{4}=\frac{b}{a}$.

856. Докажите тождество:

1) $\frac{1}{a^2+12a+36}+\frac{2}{36-a^2}+\frac{1}{a^2-12a+36}=\frac{144}{(a^2-36)^2}$;

2) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$.

857. Упростите выражение:

$$\frac{1}{a(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+9)}+\frac{1}{(a+9)(a+12)}.$$

858. Докажите, что если $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{a-b+c}{a-b-c}$, то $b=0$ или $c=0$.

859. Выполните умножение:

1) $\frac{9x}{y}\cdot\frac{y}{24x}$;

2) $\frac{m^2n^3}{25t}\cdot\left(\frac{-5t}{mn^2}\right)$;

3) $\frac{16a^4}{21b^5}\cdot\frac{9b^2}{10a^3}$;

4) $26m^2\cdot\frac{3n^2}{13m^4}$;

5) $\frac{24t^7}{16u^3}\cdot 34u^5$;

6) $\frac{4x^5y^2}{7a^3b}\cdot\frac{21xb^2}{10y^3a^2}\cdot\frac{25a^5y}{3x^4b}$.

860. Выполните умножение:

1) $\dfrac{2xy-y^2}{9}\cdot\dfrac{36}{y^4}$;

2) $\dfrac{a^2-7ab}{a^2+2ab}\cdot\dfrac{a^2b+2ab^2}{a^3-7a^2b}$;

3) $\dfrac{m^2-64}{m^3-9m^2}\cdot\dfrac{m^2-81}{m^2+8m}$;

4) $\dfrac{2x^2-16x+32}{3x^2-6x+12}\cdot\dfrac{x^3+8}{4x^2-64}$.

861. Представьте выражение в виде дроби:

1) $\left(\dfrac{a^5}{x^4}\right)^2$;

2) $\left(-\dfrac{4y}{3m^2}\right)^4$;

3) $\left(-\dfrac{10x^2y^5}{3a^4b^3}\right)^3$;

4) $\left(-\dfrac{2a^4b^4}{25x^5}\right)^2\cdot\left(-\dfrac{5x^2}{4a^2b^3}\right)^3$.

862. Выполните деление:

1) $\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-100}:\dfrac{x-5}{x-10}$;

2) $\dfrac{a^2-1}{a-8}:\dfrac{a^2+2a+1}{a-8}$;

3) $\dfrac{ab+b^2}{8b}:\dfrac{ab+a^2}{2a}$;

4) $\dfrac{2c-3}{c-1}:(2c-3)$;

5) $\dfrac{x^2-16y^2}{25x^2-4y^2}:\dfrac{x^2+8xy+16y^2}{25x^2+20xy+4y^2}$;

6) $\dfrac{n^2-3n}{49n^2-1}:\dfrac{n^4-27n}{49n^2-14n+1}$;

7) $\dfrac{m^{12}-n^{15}}{2m^{10}-8n^{14}}:\dfrac{5m^8+5m^4n^5+5n^{10}}{3m^5+6n^7}$;

8) $\dfrac{5a^2-20ab}{3a^2+b^2}:\dfrac{30(a-4b)^2}{9a^4-b^4}$.

863. Полагая данные дроби несократимыми, замените x и y такими одночленами, чтобы получилось тождество:

1) $\dfrac{x}{7a^2b^3}\cdot\dfrac{y}{4c}=\dfrac{6a^3c^2}{b}$;

2) $\dfrac{36m^2n^4}{x}:\dfrac{y}{35p^6}=\dfrac{21n}{5mp^3}$.

864. Дано: $3x-\dfrac{1}{x}=8$. Найдите значение выражения $9x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

865. Дано: $4x^2+\dfrac{1}{x^2}=6$. Найдите значение выражения $2x-\dfrac{1}{x}$.

866. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x^{3k}}{y^{2n}}:\dfrac{x^{6k}}{y^{5n}}$, где k и n — целые числа;

2) $\dfrac{a^{k+5}\cdot b^{k+3}}{c^{3k+2}}:\dfrac{a^{k+3}\cdot b^{k+2}}{c^{2k+1}}$, где k — целое число;

3) $\dfrac{(x^n+3y^n)^2-12x^ny^n}{x^{3n}+27y^{3n}}:\dfrac{x^{2n}-9y^{2n}}{(x^n-3y^n)^2+12x^ny^n}$, где n — целое число.

867. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{a+4}{a-4}-\dfrac{a-4}{a+4}\right)\cdot\dfrac{16-a^2}{32a^3}$;

2) $\left(7x-\dfrac{4x}{x-3}\right):\dfrac{14x-50}{3x-9}$;

3) $\dfrac{2a}{a-2}+\dfrac{a+7}{8-4a}\cdot\dfrac{32}{7a+a^2}$;

4) $\left(\dfrac{9c}{c-8}+\dfrac{7c}{c^2-16c+64}\right):\dfrac{9c-65}{c^2-64}-\dfrac{8c+64}{c-8}$;

5) $\left(\dfrac{a^2}{a+b}-\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}\right):\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$;

6) $\left(\dfrac{b}{b+6}+\dfrac{36+b^2}{36-b^2}-\dfrac{b}{b-6}\right):\dfrac{6b+b^2}{(6-b)^2}$;

7) $\left(\dfrac{2x}{x^3+1}:\dfrac{1-x}{x^2-x+1}+\dfrac{2}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x^2-2x+1}{4}:\dfrac{x-1}{x+1}$.

868. Докажите, что при всех допустимых значениях a значение выражения

$$\left(\frac{1}{(a-3)^2}-\frac{6}{9-a^2}+\frac{9}{(a+3)^2}\right):\frac{4(2a-3)^2}{(a^2-9)(a^2-27)}-\frac{2a^2}{9-a^2}$$

не зависит от значения a.

869. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a+\dfrac{25}{a+10}}{\dfrac{25}{a}-a}$; 2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$.

870. Решите уравнение:

1) $\dfrac{2x+6}{x+3}=2$; 3) $\dfrac{2x-9}{2x+5}+\dfrac{3x}{3x-2}=2$;

2) $\dfrac{x^2-16}{x+4}=-8$; 4) $\dfrac{5x^2+8}{x^2-16}=\dfrac{2x-1}{x+4}-\dfrac{3x-1}{4-x}$.

871. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $\dfrac{x+2}{x+a}=0$; 2) $\dfrac{x-a}{x-1}=0$.

872. Найдите значение выражения:

1) $2^{-3}+4^{-2}$; 3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}$;

2) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}+(-1{,}8)^0-5^{-1}$; 4) $2^{-3}-6^{-1}+3^{-2}$.

873. Преобразуйте выражение так, чтобы оно не содержало степеней с отрицательными и нулевыми показателями:

1) $\dfrac{3x^{-8}y^5z^{-12}}{7a^0b^{-3}c^4}$; 2) $\dfrac{1{,}001^0m^{-15}n^{-7}p^{-4}}{2^{-3}a^{-11}b^{16}c^{-22}}$.

874. Представьте выражение в виде степени с основанием a или произведения степеней с разными основаниями:

1) $a^{-7} \cdot a^{10}$;
2) $a^{-9} \cdot a^{5}$;
3) $a^{17} \cdot a^{-4} \cdot a^{-11}$;
4) $a^{-2} : a^{3}$;
5) $a^{12} : a^{-4}$;
6) $a^{-7} : a^{-11}$;
7) $a^{-12} : a^{-10} \cdot a^{4}$;
8) $(a^{3})^{-5}$;
9) $(a^{-12})^{-2}$;
10) $(a^{-3})^{4} : (a^{-2})^{5} : (a^{-1})^{-7}$;
11) $(m^{-3}n^{4}p^{7})^{-4}$;
12) $(a^{-1}b^{-2})^{-3}$;
13) $(x^{3}y^{-4})^{5} \cdot (x^{-2}y^{-3})^{3}$;
14) $\left(\dfrac{a^{11}b^{-7}}{c^{-3}d^{4}}\right)^{-3}$;
15) $\left(\dfrac{a^{-7}}{b^{5}}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{a^{4}}{b^{-7}}\right)^{-5}$.

875. Найдите значение выражения:

1) $11^{-23} \cdot 11^{25}$;
2) $3^{17} \cdot 3^{-14}$;
3) $4^{-16} : 4^{-12}$;
4) $10^{-15} : 10^{-14} \cdot 10^{-2}$;
5) $(14^{-10})^{5} \cdot (14^{-6})^{-8}$;
6) $\dfrac{3^{-12} \cdot (3^{-6})^{-3}}{(3^{-3})^{-4} \cdot (3^{-4})^{2}}$.

876. Найдите значение выражения:

1) $25^{-3} \cdot 5^{8}$;
2) $64^{-3} : 32^{-3}$;
3) $10^{-10} : 1000^{-3} \cdot (0{,}001)^{-5}$;
4) $\dfrac{(-27)^{-12} \cdot 9^{5}}{81^{-4} \cdot 3^{-7}}$;
5) $\dfrac{15^{4} \cdot 5^{-6}}{45^{-3} \cdot 3^{9}}$;
6) $\dfrac{(0{,}125)^{-8} \cdot 16^{-7}}{32^{-2}}$.

877. Упростите выражение:

1) $\dfrac{3}{5}x^{-3}y^{5} \cdot \dfrac{5}{9}x^{4}y^{-7}$;
2) $0{,}2a^{12}b^{-9} \cdot 50a^{-10}b^{10}$;
3) $-0{,}3a^{10}b^{7} \cdot 5a^{-8}b^{-6}$;
4) $0{,}36a^{-5}b^{6}c^{3} \cdot \left(-2\dfrac{2}{9}\right)a^{4}b^{-4}c^{-5}$;
5) $2x^{7} \cdot (-3x^{-2}y^{3})^{3}$;
6) $(a^{2}b^{9})^{-3} \cdot (-2a^{4}b^{10})$;
7) $(-5a^{-3}b^{2}c^{-2})^{-2} \cdot (0{,}1a^{2}b^{-3}c)^{-3}$;
8) $0{,}1m^{-5}n^{4} \cdot (0{,}01m^{-3}n)^{-2}$;
9) $-6\dfrac{1}{4}a^{-7}b^{4} \cdot \left(\dfrac{5}{2}a^{-2}b^{2}\right)^{-3}$;
10) $-(4a^{-4}b^{3})^{-2} \cdot \left(-\dfrac{1}{8}a^{3}b^{-3}\right)^{-3}$;
11) $\dfrac{19a^{-15}}{33b^{-14}} \cdot \dfrac{11b^{-11}}{76a^{-17}}$;
12) $\left(\dfrac{9x^{-3}}{5y^{-2}}\right)^{-2} \cdot \left(27x^{-2}y^{4}\right)^{2}$.

878. Упростите выражение:

1) $(a^{-5} - 1)(a^{-5} + 1) - (a^{-5} - 2)^{2}$;
2) $\dfrac{y^{-2} - x^{-2}}{x + y}$;
3) $\dfrac{a^{-3} - 3b^{-6}}{a^{-6} - 2a^{-3}b^{-6} + b^{-12}} - \dfrac{a^{-3} + 3b^{-6}}{a^{-6} - b^{-12}}$;
4) $\dfrac{m^{-4} + n^{-4}}{n^{-10}} : \dfrac{m^{-4}n^{-6} + n^{-10}}{n^{-2}}$;

5) $\dfrac{x^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}:\left(\dfrac{x^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}-\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-2}}\right)$;

6) $\dfrac{x^{-10}-4}{x^{-5}}\cdot\dfrac{1}{x^{-5}+2}-\dfrac{x^{-5}+2}{x^{-5}}$;

7) $\left(\dfrac{4c^{-6}}{c^{-6}+1}-\dfrac{c^{-6}}{c^{-12}+2c^{-6}+1}\right):\dfrac{4c^{-6}+3}{c^{-12}-1}+\dfrac{2c^{-6}}{c^{-6}+1}$.

879. Выполните действия и результат представьте в стандартном виде:

1) $1{,}3\cdot 10^{4}+1{,}8\cdot 10^{5}$;
2) $1{,}5\cdot 10^{2}-2{,}8\cdot 10^{-2}$;
3) $5{,}6\cdot 10^{3}-3{,}2\cdot 10^{2}$;
4) $4{,}8\cdot 10^{-3}+6\cdot 10^{-4}$.

880. Сократите дробь (n — целое число):

1) $\dfrac{9^{n-1}}{3^{2n-3}}$;
2) $\dfrac{7^{n+1}\cdot 2^{n-1}}{14^{n}}$;
3) $\dfrac{2^{2n-1}\cdot 3^{n+1}}{12^{n}}$;
4) $\dfrac{a^{6}+a^{11}}{a^{-4}+a}$;
5) $\dfrac{a^{-3}+a^{-2}+a^{-1}}{a^{3}+a^{2}+a}$;
6) $\dfrac{6^{n+2}-6^{n}}{35}$;
7) $\dfrac{5^{n+2}-5^{n-2}}{5^{n}}$;
8) $\dfrac{2^{-n}+1}{2^{n}+1}$.

881. Функция задана формулой $y=-\dfrac{24}{x}$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: –4; 8; 1,2;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 24; –18; 60.

882. Постройте график функции $y=\dfrac{6}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 2; –1,5; 4;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: –2; 3; –4,5;
3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

883. Постройте график функции $y=\dfrac{5}{|x|}$.

884. Постройте в одной системе координат графики функций $y=\dfrac{4}{x}$ и $y=x-3$ и укажите координаты точек их пересечения.

885. Найдите значение p, если известно, что график функции $y=\dfrac{p}{x}$ проходит через точку: 1) $A\,(-3;\,2)$; 2) $B\left(-\dfrac{1}{7};\,3\right)$; $C\,(-0{,}4;\,1{,}6)$.

886. Постройте график функции:

1) $y=\begin{cases}-\dfrac{12}{x}, & \text{если } x\leqslant -3,\\ 1-x, & \text{если } x>-3;\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}3x-1, & \text{если } x<2,\\ \dfrac{10}{x}, & \text{если } 2\leqslant x<5,\\ x-3, & \text{если } x\geqslant 5.\end{cases}$

887. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{4x+12}{x^2+3x}$; 2) $y = \dfrac{32-2x^2}{x^3-16x}$.

888. Найдите значение выражения:

1) $0,4\sqrt{625} - \dfrac{1}{4}\sqrt{144}$; 4) $\sqrt{1\dfrac{11}{25}} + \sqrt{3\dfrac{6}{25}} - 0,04\sqrt{10\,000}$;

2) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{0,25} + \sqrt{2^4+9}$; 5) $\dfrac{1}{5}\sqrt{625} - \dfrac{3}{17}\sqrt{289}$.

3) $3\sqrt{0,25} - \sqrt{7^2+24^2}$;

889. Найдите значение выражения:

1) $\left(\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{1,69}$; 4) $\sqrt{1089} - \left(\dfrac{1}{6}\sqrt{216}\right)^2$;

2) $\left(3\sqrt{15}\right)^2 - \left(15\sqrt{3}\right)^2$; 5) $\dfrac{4}{9}\sqrt{39,69} - \dfrac{5}{49}\sqrt{59,29} + \left(-\dfrac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2$;

3) $50\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\sqrt{7}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2$; 6) $\dfrac{1}{2}\sqrt{17^2-15^2} + \left(2\sqrt{5\dfrac{1}{2}}\right)^2 - 0,3\sqrt{900}$.

890. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} = 2$; 5) $\sqrt{x} + 5 = 0$; 9) $\sqrt{7x-4} = 2$;

2) $\sqrt{x} = \dfrac{1}{4}$; 6) $\dfrac{1}{4}\sqrt{x} + 5 = 0$; 10) $\dfrac{28}{\sqrt{x}} = 7$;

3) $\sqrt{x} - 3 = 0$; 7) $\sqrt{7x} - 4 = 0$; 11) $\dfrac{15}{\sqrt{x+4}} = 3$;

4) $2\sqrt{x} - 7 = 0$; 8) $\sqrt{7x-4} = 0$; 12) $\sqrt{4+\sqrt{3+x}} = 5$.

891. Найдите значение корня:

1) $\sqrt{9\cdot 100}$; 4) $\sqrt{0,64\cdot 0,25\cdot 121}$; 7) $\sqrt{\dfrac{9}{64}\cdot\dfrac{1024}{1089}}$;

2) $\sqrt{0,49\cdot 16}$; 5) $\sqrt{\dfrac{25}{196}}$; 8) $\sqrt{3\dfrac{13}{36}\cdot 4\dfrac{29}{49}}$.

3) $\sqrt{676\cdot 0,04}$; 6) $\sqrt{18\dfrac{1}{16}}$;

892. Найдите значение корня:

1) $\sqrt{75\cdot 234}$; 2) $\sqrt{2\cdot 800}$; 3) $\sqrt{1,6\cdot 12,1}$; 4) $\sqrt{2890\cdot 2,5}$.

893. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{108}\cdot\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{160}\cdot\sqrt{250}$; 5) $\dfrac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt{52}\cdot\sqrt{13}$; 4) $\sqrt{0,4}\cdot\sqrt{4,9}$; 6) $\dfrac{\sqrt{90}}{\sqrt{0,225}}$.

894. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{(17{,}1)^2}$;
2) $\sqrt{(-1{,}17)^2}$;
3) $\frac{1}{2}\sqrt{(62)^2}$;
4) $-2{,}4\sqrt{(-4)^2}$;
5) $\sqrt{11^4}$;
6) $\sqrt{(-23)^4}$;
7) $\sqrt{2^6 \cdot 7^4}$;
8) $\sqrt{(-3)^4 \cdot 2^6 \cdot (-0{,}1)^2}$.

895. Упростите выражение:

1) $\sqrt{q^2}$, если $q > 0$;
2) $\sqrt{t^2}$, если $t \leqslant 0$;
3) $\sqrt{49m^2n^8}$, если $m \geqslant 0$;
4) $\sqrt{0{,}81a^6b^{10}}$, если $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$;
5) $\frac{1}{5}x\sqrt{100x^{26}}$, если $x \leqslant 0$;
6) $\frac{\sqrt{a^6b^{20}c^{34}}}{ab^8c^{12}}$, если $a > 0$, $c < 0$;
7) $\frac{1{,}2x^3}{y^5}\sqrt{\frac{y^{14}}{x^{10}}}$, если $y > 0$, $x < 0$;
8) $-0{,}1x^2\sqrt{1{,}96x^{18}y^{16}}$, если $x \leqslant 0$.

896. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(10-\sqrt{11})^2}$;
2) $\sqrt{(\sqrt{10}-11)^2}$;
3) $\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{11})^2}$;
4) $\sqrt{(3-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{6})^2}$;
5) $\sqrt{(\sqrt{24}-5)^2} - \sqrt{(\sqrt{24}-4)^2}$.

897. Упростите выражение:

1) $\sqrt{18+8\sqrt{2}}$;
2) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$;
3) $\sqrt{16+6\sqrt{7}} + \sqrt{23-8\sqrt{7}}$;
4) $\sqrt{26-6\sqrt{17}} - \sqrt{66-14\sqrt{17}}$;
5) $\sqrt{46+10\sqrt{21}} + \sqrt{46-10\sqrt{21}}$.

898. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{24}$;
2) $\sqrt{63}$;
3) $\sqrt{700}$;
4) $\sqrt{0{,}32}$;
5) $\frac{1}{7}\sqrt{196}$;
6) $-2{,}4\sqrt{600}$;
7) $-1{,}6\sqrt{50}$;
8) $\frac{5}{8}\sqrt{3\frac{21}{25}}$.

899. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{10a^2}$, если $a \geqslant 0$; 4) $\sqrt{36m^2n}$, если $m < 0$;

2) $\sqrt{15b^2}$, если $b \leqslant 0$; 5) $\sqrt{4x^6y^5}$, если $x > 0$;

3) $\sqrt{x^{11}y^{12}}$, если $y \neq 0$; 6) $\sqrt{700a^5b^{22}}$, если $b < 0$.

900. Внесите множитель под знак корня:

1) $3\sqrt{10}$; 3) $0{,}3\sqrt{3}$; 5) $\frac{2}{7}\sqrt{98}$; 7) $-0{,}5\sqrt{30}$;

2) $2\sqrt{13}$; 4) $\frac{1}{5}\sqrt{175}$; 6) $-5\sqrt{7}$; 8) $4\sqrt{a}$.

901. Внесите множитель под знак корня:

1) $a\sqrt{5}$; 2) $b\sqrt{-b}$; 3) $x\sqrt{x^7}$; 4) $n\sqrt{m}$, если $n \leqslant 0$.

902. Сравните числа:

1) $5\sqrt{6}$ и $6\sqrt{5}$; 3) $0{,}3\sqrt{3\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{0{,}3}$;

2) $\sqrt{55}$ и $3\sqrt{6}$; 4) $\frac{3}{7}\sqrt{16\frac{1}{3}}$ и $\frac{3}{4}\sqrt{5\frac{1}{3}}$.

903. Упростите выражение:

1) $\sqrt{64a} + \sqrt{4a} - \sqrt{121a}$;

2) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{320}$;

3) $6\sqrt{125a} - 2\sqrt{80a} + 3\sqrt{180a}$.

904. Выполните умножение:

1) $\left(\sqrt{80} - \sqrt{45}\right)\sqrt{5}$; 5) $\left(\sqrt{19} - \sqrt{13}\right)\left(\sqrt{19} + \sqrt{13}\right)$;

2) $\left(2\sqrt{6} + \sqrt{54} - \sqrt{96}\right)\sqrt{6}$; 6) $\left(4\sqrt{m} + 9\sqrt{n}\right)\left(4\sqrt{m} - 9\sqrt{n}\right)$;

3) $\left(12 - \sqrt{10}\right)\left(3 + \sqrt{10}\right)$; 7) $\left(\sqrt{5x} + \sqrt{11y}\right)^2$;

4) $\left(2\sqrt{5} + \sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{7} - \sqrt{5}\right)$; 8) $\left(3\sqrt{11} - 2\sqrt{10}\right)^2$.

905. Сократите дробь:

1) $\frac{x^2 - 19}{x + \sqrt{19}}$; 3) $\frac{m + 8\sqrt{m}}{m - 64}$; 5) $\frac{a - 6\sqrt{ab} + 9b}{a - 9b}$, если $a > 0$, $b > 0$;

2) $\frac{\sqrt{x} - 6}{x - 36}$; 4) $\frac{29 - \sqrt{29}}{\sqrt{29}}$; 6) $\frac{11 - \sqrt{33}}{\sqrt{33} - 3}$.

906. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{a^3}{\sqrt{b}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{13}}$; 5) $\frac{n + 9}{\sqrt{n + 9}}$; 7) $\frac{6}{\sqrt{21} + \sqrt{15}}$;

2) $\frac{7}{a\sqrt{a}}$; 4) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; 6) $\frac{3}{\sqrt{13} - 2}$; 8) $\frac{18}{\sqrt{47} - \sqrt{29}}$.

907. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}+1}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

908. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{5}{4-3\sqrt{2}}-\dfrac{5}{4+3\sqrt{2}}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}-1}$;

3) $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$.

909. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{x}{x-9}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right):\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

910. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{x}+5\right)^2-20\sqrt{x}}+\sqrt{\left(\sqrt{x}-4\right)^2+16\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt{a+2\sqrt{a+3}+4}+\sqrt{a-2\sqrt{a+3}+4}$.

911. Упростите выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{47}}.$$

912. Докажите, что:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$

913. Расположите в порядке возрастания числа: 13; $\sqrt{165}$; 12,7; $\sqrt{171}$; 13,4.

914. Постройте в одной системе координат графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x-6$ и определите координаты точки их пересечения.

915. Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число: 1) $\sqrt{67}$; 2) $\sqrt{103}$; 3) $-\sqrt{51{,}25}$?

916. Какие целые числа расположены на координатной прямой между числами:

1) 6 и $\sqrt{67}$; 2) $\sqrt{14}$ и $\sqrt{52}$; 3) $-\sqrt{53}$ и $-4{,}9$; 4) $-\sqrt{31}$ и 2,7?

917. Дана функция $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x}, \text{ если } x<0,\\ 3, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant 4,\\ \sqrt{x}, \text{ если } x>4.\end{cases}$

1) Найдите $f(-0{,}5)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(9)$.
2) Постройте график данной функции.

918. Решите уравнение:

1) $x^2 - 4x - 32 = 0$;
2) $x^2 - 10x + 21 = 0$;
3) $6x^2 - 5x + 1 = 0$;
4) $8x^2 + 2x - 3 = 0$;
5) $x^2 + 6x - 15 = 0$;
6) $3x^2 - x - 5 = 0$;
7) $4x^2 + 28x + 49 = 0$;
8) $x^2 - 16x + 71 = 0$.

919. Решите уравнение:

1) $(x - 4)(x + 2) - 2(3x + 1)(x - 3) = x(x + 27)$;
2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
3) $(x + 4)(x^2 + x - 13) - (x + 7)(x^2 + 2x - 5) = x + 1$;
4) $\frac{2(x^2 - 9)}{5} - \frac{x + 1}{2} = \frac{x - 41}{4}$;
5) $\frac{x^2 + 5x}{3} - \frac{x + 3}{2} = \frac{2x^2 - 2}{8}$.

920. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $x^2 + (5a - 1)x + 4a^2 - a = 0$;
2) $x^2 - (2a + 3)x + 6a = 0$;
3) $a^2x^2 - 10ax + 16 = 0$.

921. Решите уравнение:

1) $|x^2 - 2x - 6| = 6$;
2) $x^2 - 6|x| - 16 = 0$;
3) $x|x| + 2x - 15 = 0$;
4) $||x^2 - 6x - 4| - 3| = 1$.

922. Решите уравнение:

1) $x^2 - 6x + \frac{2}{x - 2} = \frac{2}{x - 2} - 8$;
2) $\left(\sqrt{x} - 5\right)\left(15x^2 - 7x - 2\right) = 0$;
3) $(x^2 + 6x)(\sqrt{x} - 4)(x^2 - 8x - 48) = 0$.

923. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 8} = 0$;
2) $x^2 - 4x + 4 + |x^2 - 3x + 2| = 0$;
3) $\sqrt{25 - x^2} + |x^2 + 8x - 20| = 0$.

924. Не вычисляя дискриминант, найдите, при каком значении a уравнение:
1) $x^2 + 22x + a = 0$; 2) $x^2 - ax + 81 = 0$
имеет единственный корень. Найдите этот корень.

925. При каком значении b корнями уравнения $x^2 + bx - 23 = 0$ являются противоположные числа? Найдите эти корни.

926. Число $-\frac{1}{3}$ является корнем уравнения $12x^2 - bx + 5 = 0$. Найдите значение b и второй корень уравнения.

927. Число 0,2 является корнем уравнения $8x^2 - 3{,}2x + k = 0$. Найдите значение k и второй корень уравнения.

928. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - bx + 20 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 = 5x_2$. Найдите значение b и корни уравнения.

929. Составьте квадратное уравнение, корни которого на 1 меньше соответствующих корней уравнения $x^2 - 3x - 5 = 0$.

930. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 7x}{x + 1} = \frac{8}{x + 1}$;

2) $\frac{3x^2 + 4x}{x^2 - 9} = \frac{3 - 4x}{x^2 - 9}$;

3) $\frac{4 - x}{4x - 3} = \frac{2x - 2}{7 - x}$;

4) $\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 6} = \frac{7}{12}$;

5) $\frac{63}{x^2 + 3x} - \frac{2}{x^2 - 3x} = \frac{7}{x}$;

6) $\frac{2x}{x - 2} + \frac{3}{x + 4} = \frac{4x - 2}{(x + 4)(x - 2)}$;

7) $\frac{1}{x^2 + 2x} - \frac{2}{x^2 - 4} = \frac{x + 4}{5x(2 - x)}$;

8) $\frac{2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{3}{x^2 + x + 1}$.

931. Решите уравнение:

1) $\frac{x - 1}{x + 5} + \frac{x + 5}{x - 1} = \frac{10}{3}$;

2) $\frac{x^2 - 3x + 6}{x} + \frac{2x}{x^2 - 3x + 6} = 3$;

3) $\frac{x^2}{(3x - 1)^2} - \frac{4x}{3x - 1} - 5 = 0$;

4) $\frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2$.

932. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2 - 2ax + 3}{x - 2} = 0$ имеет единственный корень?

933. Верно ли утверждение (ответ обоснуйте):

1) если число m является корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то число $-m$ является корнем уравнения $ax^2 - bx + c = 0$;

2) если число m является корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $c \neq 0$, то число $\frac{1}{m}$ является корнем уравнения $cx^2 + bx + a = 0$?

934. Найдите все целые значения b, при которых имеет целые корни уравнение:

1) $x^2 + bx - 6 = 0$; 2) $x^2 + bx + 21 = 0$.

935. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - (2a - 5)x + a^2 - 7 = 0$. При каком значении a выполняется равенство $2x_1 + 2x_2 = x_1x_2$?

936. При каком значении a произведение корней уравнения $x^2 + (a + 9)x + a^2 + 2a = 0$ равно 15?

937. Автобус должен был проехать 255 км. Проехав $\frac{7}{17}$ пути, он остановился на 1 ч, а затем продолжил движение со скоростью на 5 км/ч меньше начальной. Найдите начальную скорость автобуса, если в пункт назначения он прибыл через 9 ч после выезда.

938. В слитке сплава меди и цинка содержится 20 кг цинка. К этому слитку добавили 3 кг меди и 4 кг цинка. Процентное содержание меди в полученном сплаве на 5 % больше, чем в исходном. Сколько килограммов меди содержал исходный сплав?

Сведения из курса алгебры 7 класса

Целые выражения

1. Выражения с переменными. Целые рациональные выражения. Числовое значение выражения

- ✔ Выражение, составленное из переменных, чисел, степеней, знаков арифметических действий и скобок, называют выражением с переменными (или с переменной, если она одна).
- ✔ Если вместо переменных (переменной) подставить в выражение их значения, то получим числовое выражение, значение которого называют значением выражения с переменными при данных значениях переменных.
- ✔ Числовые выражения и выражения с переменными называют алгебраическими выражениями.
- ✔ Выражения с переменными, не содержащие деления на выражения с переменными, называют целыми выражениями.

2. Тождественно равные выражения. Тождества

- ✔ Выражения, соответствующие значения которых равны при любых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.
- ✔ Равенство, верное при любых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.
- ✔ Замену одного выражения другим, тождественно равным ему, называют тождественным преобразованием.
- ✔ Доказать тождество — значит доказать, что данное равенство является тождеством.
- ✔ Для доказательства тождеств используют следующие приёмы (методы):
  - тождественно преобразуют одну из частей данного равенства, получая другую часть;
  - тождественно преобразуют каждую из частей данного равенства, получая одно и то же выражение;
  - показывают, что разность левой и правой частей данного равенства тождественно равна нулю.
- ✔ Чтобы доказать, что равенство не является тождеством, достаточно привести контрпример: указать такие значения переменных (переменной), при которых данное равенство не выполняется.

3. Степень с натуральным показателем

- ✔ Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a.
- ✔ Степень с основанием a и показателем n обозначают a^n и читают: «a в n-й степени». Степени с показателями 2 и 3 можно прочитать иначе: запись a^2 читают: «a в квадрате», запись a^3: «a в кубе».
- ✔ Степенью числа a с показателем 1 называют само это число.
- ✔ При возведении неотрицательного числа в степень получаем неотрицательное число.

- ✔ При возведении отрицательного числа в степень с чётным показателем получаем положительное число, а при возведении отрицательного числа в степень с нечётным показателем получаем отрицательное число.

4. Свойства степени с натуральным показателем

- ✔ Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n выполняется равенство
$$a^m a^n = a^{m+n},$$
то есть при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складывают, а основание оставляют тем же.
- ✔ Для любого числа a, отличного от нуля, и любых натуральных чисел m и n таких, что $m > n$, выполняется равенство
$$a^m : a^n = a^{m-n},$$
то есть при делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя, а основание оставляют тем же.
- ✔ Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n выполняется равенство
$$(a^m)^n = a^{mn},$$
то есть при возведении степени в степень показатели перемножают, а основание оставляют тем же.
- ✔ Для любых чисел a и b и любого натурального числа n выполняется равенство
$$(ab)^n = a^n b^n,$$
то есть при возведении произведения в степень каждый множитель возводят в степень и полученные результаты перемножают.

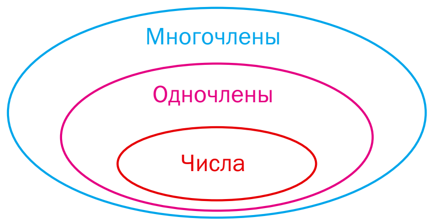
5. Одночлены

- ✔ Выражения, являющиеся произведениями чисел, переменных и их степеней, называют одночленами.
- ✔ Одночлен, содержащий только один отличный от нуля числовой множитель, стоящий на первом месте, и у которого все остальные множители — степени с разными основаниями, называют стандартным видом одночлена. К одночленам стандартного вида также относят числа, отличные от нуля, переменные и их степени.
- ✔ Число 0, а также одночлены, тождественно равные нулю, называют нуль-одночленами. Их не относят к одночленам стандартного вида.
- ✔ Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют коэффициентом одночлена.
- ✔ Одночлены, имеющие одинаковые буквенные части, называют подобными.
- ✔ Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех входящих в него переменных. Степень одночлена, являющегося числом, отличным от нуля, принимают равной нулю.
- ✔ Считают, что нуль-одночлен степени не имеет.
- ✔ Произведением двух одночленов является одночлен. При возведении одночлена в степень получают также одночлен.

6. Многочлены

- Выражение, являющееся суммой нескольких одночленов, называют многочленом.
- Одночлены, из которых составлен многочлен, называют членами многочлена.
- Многочлен, состоящий из двух членов, называют двучленом, а состоящий из трёх членов — трёхчленом. Одночлен является частным случаем многочлена. Считают, что такой многочлен состоит из одного члена.
- Связь между многочленами, одночленами и их частным случаем — числами иллюстрирует схема на рисунке 46.

Рис. 46



- Если среди одночленов, из которых состоит многочлен, есть подобные, то их называют подобными членами многочлена.
- Многочлен, состоящий из одночленов стандартного вида, среди которых нет подобных, называют многочленом стандартного вида.
- Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней одночленов, из которых этот многочлен составлен.
- Чтобы сложить два многочлена, надо каждый из них заключить в скобки и поставить между ними знак «+», затем раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (если таковые имеются).
- Чтобы из одного многочлена вычесть другой, надо каждый из них заключить в скобки, поставить перед вычитаемым знак «–», затем раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (если таковые имеются).
- Представление многочлена в виде произведения нескольких многочленов называют разложением многочлена на множители.

7. Умножение одночлена на многочлен

- Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

8. Умножение многочлена на многочлен

- Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.
- При умножении многочлена на многочлен всегда получается многочлен.

Формулы сокращённого умножения

9. Произведение разности и суммы двух выражений

- Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

10. Разность квадратов двух выражений

- Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

11. Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений

- Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

- Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

12. Преобразование многочлена в квадрат суммы или разности двух выражений

- Формулы

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

позволяют «свернуть» трёхчлен в квадрат двучлена.

- Трёхчлен, который можно представить в виде квадрата двучлена, называют полным квадратом.

13. Сумма и разность кубов двух выражений

- Многочлен $a^2 - ab + b^2$ называют неполным квадратом разности.
- Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

- Многочлен $a^2 + ab + b^2$ называют неполным квадратом суммы.
- Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Уравнения

14. Корень уравнения

- Корнем уравнения называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.
- Решить уравнение — значит найти все его корни или убедиться, что их не существует.
- При решении задач на составление уравнений удобно использовать такую схему:

  1) по условию задачи составить уравнение (сконструировать математическую модель задачи);

2) решить полученное уравнение;
3) выяснить, соответствует ли найденный корень содержанию задачи, и дать ответ.

15. Свойства уравнений

- ✔ Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.
- ✔ Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.
- ✔ Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

16. Линейное уравнение с одной переменной

- ✔ Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, называют линейным уравнением с одной переменной.
- ✔ Если $a \neq 0$, то, разделив обе части уравнения $ax = b$ на a, получим $x = \frac{b}{a}$.

  Следовательно, если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень, равный $\frac{b}{a}$.

  Если $a = 0$, то линейное уравнение принимает следующий вид: $0x = b$. Тогда возможны два случая: $b = 0$ или $b \neq 0$.

  В первом случае получаем уравнение $0x = b$. Отсюда, если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение $ax = b$ имеет бесконечно много корней: любое число является его корнем.

  Во втором случае, если $b \neq 0$, то при любом значении x имеем неверное равенство $0x = b$. Отсюда, если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ корней не имеет.

Значения a и b	$a \neq 0$	$a = 0$, $b = 0$	$a = 0$, $b \neq 0$
Корни уравнения $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — любое число	Корней нет

Функции

17. Функция. Область определения и область значений функции

- ✔ Правило, с помощью которого для каждого значения независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной, называют функцией, а соответствующую зависимость одной переменной от другой — функциональной.

- ✔ Обычно независимую переменную обозначают буквой x, зависимую — буквой y, функцию (правило) — буквой f. Если переменная y функционально зависит от переменной x, то этот факт обозначают так: $y = f(x)$ (читают: «игрек равен эф от икс»).
- ✔ Независимую переменную называют аргументом функции.
- ✔ Значение зависимой переменной называют значением функции. Значение функции f, которое соответствует значению x_0 аргумента x, обозначают $f(x_0)$.
- ✔ Все значения, которые принимает аргумент, образуют область определения функции. Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют область значений функции.

18. Способы задания функции

Функция считается заданной, если указаны её область определения и правило, с помощью которого можно для каждого значения независимой переменной найти значение зависимой переменной.

Поскольку функция — это правило, то её можно задать с помощью предложений какого-либо языка (русского и др.). Этот способ задания функции называют описательным.

Самым распространённым способом задания функции является задание функции с помощью формулы.

Если функция задана формулой, правая часть которой — целое выражение, и при этом не указана область её определения, то считают, что областью определения такой функции являются все числа.

Ещё одним способом задания функции является табличный, при котором функцию задают таблицей, состоящей из двух строк. Все числа, записанные в первой строке таблицы, составляют область определения данной функции. Столбец таблицы представляет собой пару чисел: «независимая переменная — зависимая переменная». Этот способ удобно применять в тех случаях, когда область определения функции состоит из нескольких чисел.

19. График функции

- ✔ Графиком функции f называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции f.
- ✔ Если какая-либо фигура является графиком функции f, то выполняются два условия:

  1) если x_0 — некоторое значение аргумента, а $f(x_0)$ — соответствующее значение функции, то точка с координатами $(x_0; f(x_0))$ обязательно принадлежит графику;

  2) если $(x_0; y_0)$ — координаты произвольной точки графика, то x_0 и y_0 — соответствующие значения независимой и зависимой переменных функции f, то есть $y_0 = f(x_0)$.

  Фигура, изображённая на координатной плоскости, может быть графиком некоторой функции, если любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, имеет с этой фигурой не более одной общей точки.

20. Линейная функция, её график и свойства

✔ Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, x — независимая переменная, называют линейной.
Графиком линейной функции, область определения которой — все числа, является прямая.

✔ Линейную функцию, заданную формулой $y = kx$, где $k \neq 0$, называют прямой пропорциональностью.
Прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции (это иллюстрирует схема на рисунке 47).

Рис. 47

Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат. Поэтому для построения графика прямой пропорциональности достаточно указать какую-нибудь точку графика, отличную от начала координат, и провести прямую через эту точку и точку O (0; 0).
Если в формуле $y = kx + b$ положить $k = 0$, то получим $y = b$. В этом случае значения функции будут оставаться неизменными при любых изменениях значений аргумента. График такой функции — прямая, параллельная оси абсцисс.

Системы линейных уравнений с двумя переменными

21. Уравнение с двумя переменными

✔ Пару значений переменных, обращающую уравнение с двумя переменными в верное равенство, называют решением уравнения с двумя переменными.

✔ Решить уравнение с двумя переменными — значит найти все его решения или показать, что оно не имеет решений.

✔ Свойства уравнений с двумя переменными аналогичны свойствам уравнений с одной переменной (см. п. 15 на с. 232).

✔ Графиком уравнения с двумя переменными называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, координаты которых (пары чисел) являются решениями данного уравнения.

✔ Когда какая-либо фигура является графиком уравнения, то выполняются два условия:
1) все решения уравнения являются координатами точек, принадлежащих графику;
2) координаты любой точки, принадлежащей графику, — это пара чисел, являющаяся решением данного уравнения.

22. Линейное уравнение с двумя переменными и его график

✔ Линейным уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b, c — некоторые числа.

- ✔ В каждом из случаев, когда $b \neq 0$ или $b = 0$ и $a \neq 0$, графиком уравнения $ax + by = c$ является прямая.
- ✔ Пусть $a = b = 0$ в линейном уравнении $ax + by = c$. Имеем $0x + 0y = c$.
  Если $c \neq 0$, то это уравнение не имеет решений, а значит, на координатной плоскости не существует точек, которые могли бы служить графиком уравнения.
  Если $c = 0$, то уравнение принимает вид $0x + 0y = 0$. Любая пара чисел является его решением. Следовательно, в этом случае графиком уравнения является вся координатная плоскость.
  Следующая таблица подытоживает сказанное выше.

Уравнение	Значения a, b, c	График
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a и c — любые	Невертикальная прямая
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c — любое	Вертикальная прямая
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	Вся координатная плоскость
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

23. Системы уравнений с двумя переменными

- ✔ Если требуется найти все общие решения нескольких уравнений, то говорят, что надо решить систему уравнений.
- ✔ Систему уравнений записывают с помощью фигурной скобки.
- ✔ Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающих каждое уравнение в верное равенство.
- ✔ Решить систему уравнений — значит найти все её решения или доказать, что решений не существует.

24. Графический метод решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными

- ✔ Графический метод решения системы уравнений заключается в следующем:
- построить на одной координатной плоскости графики уравнений, входящих в систему;
- найти координаты всех точек пересечения построенных графиков;
- полученные пары чисел и будут искомыми решениями.
- ✔ Если графиками уравнений, входящих в систему линейных уравнений, являются прямые, то количество решений этой системы зависит от взаимного расположения двух прямых на плоскости:
- если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение;
- если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений;
- если прямые параллельны, то система решений не имеет.

25. Решение систем линейных уравнений методом подстановки

✔ Чтобы решить систему линейных уравнений методом подстановки, следует:
1) выразить из любого уравнения системы одну переменную через другую;
2) подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной выражение, полученное на первом шаге;
3) решить уравнение с одной переменной, полученное на втором шаге;
4) подставить найденное значение переменной в выражение, полученное на первом шаге;
5) вычислить значение второй переменной;
6) записать ответ.

26. Решение систем линейных уравнений методом сложения

✔ Чтобы решить систему линейных уравнений методом сложения, следует:
1) подобрав «выгодные» множители, преобразовать одно или оба уравнения системы так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;
2) сложить почленно левые и правые части уравнений, полученных на первом шаге;
3) решить уравнение с одной переменной, полученное на втором шаге;
4) подставить найденное на третьем шаге значение переменной в любое из уравнений исходной системы;
5) вычислить значение второй переменной;
6) записать ответ.

Модуль числа

27. Модуль числа

✔ Модулем числа a называют расстояние от начала отсчёта до точки, изображающей это число на координатной прямой.
Модуль числа a обозначают так: $|a|$ (читают: «модуль a»).

✔ Модуль неотрицательного числа равен этому числу, модуль отрицательного числа равен числу, противоположному данному.

✔ С помощью фигурной скобки свойство модуля числа a можно записать так:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

✔ Модуль числа принимает только неотрицательные значения.

✔ Модули противоположных чисел равны: $|a| = |-a|$.

Координатная плоскость

28. Прямоугольная система координат

✔ Проведём на плоскости две перпендикулярные координатные прямые так, чтобы их начала отсчёта совпадали (рис. 48). Эти прямые называют осями координат, а точку O их пересечения — началом координат. Горизонтальную ось называют осью абсцисс и обозначают буквой x, вертикальную ось называют осью ординат и обозначают буквой y.

- Ось абсцисс называют также осью x, а ось ординат — осью y, вместе они образуют прямоугольную систему координат. Такую систему координат называют декартовой.
- Плоскость, на которой задана прямоугольная система координат, называют координатной плоскостью.
- Координатные оси разбивают плоскость на четыре части, которые называют координатными четвертями и нумеруют так, как показано на рисунке 49.

Рис. 48

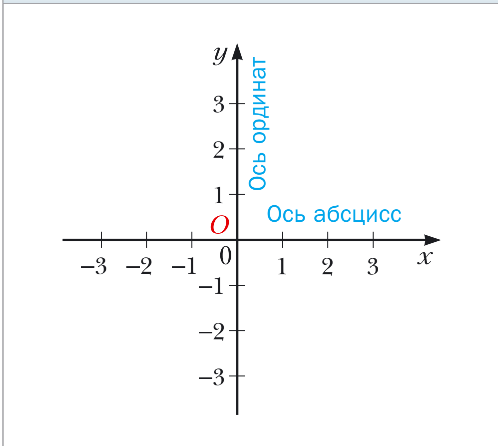
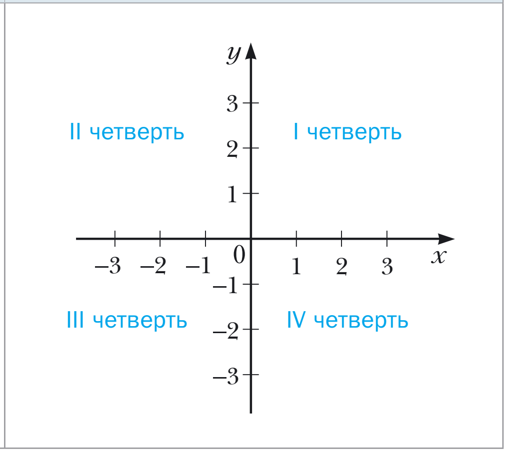
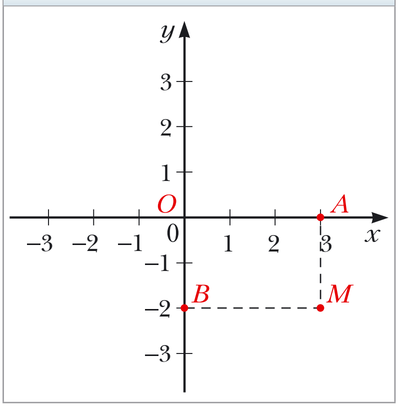


Рис. 49



- На координатной плоскости отметим точку M (рис. 50). Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно оси абсцисс, пересекает её в точке A, а прямая, перпендикулярная оси ординат, пересекает эту ось в точке B. Точка A на оси x имеет координату 3, а точка B на оси y — координату -2. Число 3 называют абсциссой точки M, число -2 — ординатой точки M. Числа 3 и -2 однозначно определяют место точки M на координатной плоскости. Поэтому их называют координатами точки M и записывают так: $M\ (3;\ -2)$.
- Записывая координаты точки, абсциссу всегда ставят на первое место, а ординату — на второе.
- Если точка лежит на оси абсцисс, то её ордината равна нулю, а если точка лежит на оси ординат, то нулю равна её абсцисса.

Рис. 50



Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект — это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации в литературе и интернет-ресурсов. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.
2. Работа начинается с составления предварительного плана, в котором отражается замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками и литературой при помощи руководителя проекта составляется окончательный план.
3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записаны в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.
4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.
5. Примерный объём работы — 10—15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.
6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Российские женщины-математики

Рекомендуемая литература

Малинин В. В. Софья Ковалевская — женщина-математик. Её жизнь и учёная деятельность. — ЦИТ СГГА, 2004.

Математики, механики. Биографический справочник. — М., 1983.

Энциклопедия для детей. Математика. Том 11. — М. : Аванта+, 2003.

2. Леонард Эйлер — великий математик

Рекомендуемая литература

Белл Э. Т. Творцы математики. — М. : Просвещение, 1979.

Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. — М. : МЦНМО, 2006.

Делоне Б. Н. Леонард Эйлер // Квант. — 1974. — № 5.

Полякова Т. С. Леонард Эйлер и математическое образование в России. — М. : КомКнига, 2007.

Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука : сб. статей. — М. : Наука, 1988.

Энциклопедия для детей. Математика. Том 11. — М. : Аванта+, 2003.

3. Математические термины и символы. История возникновения и развития

Рекомендуемая литература

Глейзер Г. И. История математики в школе. IX–X кл. — М. : Просвещение, 1993.

Энциклопедия для детей. Математика. Том 11. — М. : Аванта+, 2003.

4. Алгоритм Евклида и линейные диофантовы уравнения

Рекомендуемая литература

Вагутен В. Н. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики // Квант. — 1972. — № 6.

Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. — Челябинск : Взгляд, 2005.

Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. — М. : Наука, 1978. (Популярные лекции по математике.)

Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. — Киров : АСА, 1984.

Горбачёв Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М. : МЦНМО, 2004.

Михайлов И. О диофантовом анализе // Квант. — 1980. — № 6.

Факультативный курс по математике. 7–9 / сост. И. Л. Никольская. — М. : Просвещение, 1991.

5. Парадоксы теории множеств

Рекомендуемая литература

Бурова И. Н. Парадоксы теории множеств и диалектика. — М., 1976.

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? — М. : МЦНМО, 2001.

Ященко И. В. Парадоксы теории множеств. — М. : МЦНМО, 2002.

6. Малая теорема Ферма

Рекомендуемая литература

Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. — Челябинск : Взгляд, 2005.

Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. — Киров : АСА, 1984.

Горбачёв Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М. : МЦНМО, 2004.

7. Поиск инварианта

Рекомендуемая литература

Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. — Киров : АСА, 1984.

Горбачёв Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М. : МЦНМО, 2004.

Курляндчик Л., Фомин Д. Этюды о полуинварианте // Приложение к журналу «Квант». Математический кружок. Вып. 2. – М. : Бюро Квантум, 1989.

Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. – М. : МСНМО, 2006.

Толпыго А. Инварианты // Приложение к журналу «Квант». Математический кружок. Вып. 2. – М. : Бюро Квантум, 1998.

Фоминых Ю. Ф. Инварианты // Математика в школе. – 1998. – № 5.

8. Принцип крайнего

Рекомендуемая литература

Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. – Киров : АСА, 1984.

Горбачёв Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М. : МЦНМО, 2004.

Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. – М. : МЦНМО, 2006.

Дружим с компьютером

В предыдущих классах вы уже использовали компьютер при изучении математики. Вы научились:

- пользоваться **калькулятором** для вычислений;
- набирать и оформлять несложные тексты в **текстовом редакторе** (например, *Microsoft Word*);
- составлять таблицы с помощью **редактора таблиц** (например, *Microsoft Excel*);
- рисовать с помощью **графического редактора** (например, *Paint*);
- пользоваться глобальной сетью **Интернет** и искать в ней информацию.

Все эти умения вы будете совершенствовать и в дальнейшем.

Если вы хотите в будущем стать математиком, программистом, инженером, то есть широко использовать математику в своей работе, то советуем вам осваивать специализированные математические пакеты, которые помогают школьникам и студентам выполнить техническую работу при решении задач. Это, например, *MathLAB*, *MathCAD*. Также полезно научиться пользоваться графическим редактором, с помощью которого можно работать с геометрическими фигурами и строить чертежи. Примерами таких редакторов могут служить *CorelDraw*, *Visio* и т. п. Если вы собираетесь выступить с докладом или интересным сообщением, то сделать его более наглядным помогут программы для построения презентаций (например, *PowerPoint*).

Кроме этого, существует много других программ, созданных специально для школьников и предназначенных для помощи в изучении математики.

Конечно же это далеко не всё, что есть на просторах Интернета. Ищите, интересуйтесь, общайтесь со своими сверстниками, и вы найдёте много интересного. А может, став постарше, вы и сами разработаете полезные программы для изучения математики.

Задания с элементами информатики

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Большинство этих заданий — продолжение и развитие упражнений этого учебника, которые вы будете решать на уроках и дома (такие упражнения в тексте учебника помечены значком «»); в этом разделе указан номер соответствующего задания.

Задания, требующие использования калькулятора, выполняйте с помощью стандартной программы «Калькулятор», которая есть на вашем компьютере.

На уроках информатики вы будете изучать элементы программирования, создавать алгоритмы и программы, в которых будут использоваться полученные математические знания. Такие задания, содержащие элементы программирования, не являются обязательными. Они отмечены звёздочкой. Пока вы не изучили на нужном уровне какой-либо язык программирования, достаточно придумать алгоритм и записать его словами либо в виде блок-схемы. Заметим, что умение составлять алгоритмы (последовательности действий) пригодится вам не только в программировании, но и в других областях деятельности.

К § 1 «Рациональные дроби»

Научитесь вычислять значение дробного выражения с помощью калькулятора. В каких случаях невозможно вычислить значение дробного выражения?

2—4. Выполните какие-либо из этих заданий с помощью калькулятора либо специализированного математического пакета.

К § 2 «Основное свойство рациональной дроби»

46, 47. Выберите какой-либо пример из этих заданий. Найдите значение выражения дважды: сначала записанного в условии выражения, затем — предварительно сократив его. Вычисления выполняйте с помощью калькулятора либо специализированного математического пакета. Насколько сократилось количество действий после сокращения? Можно ли после сокращения выполнить вычисления устно?

63. Постройте график функции с помощью графического редактора. Какой инструмент нужен, чтобы с помощью графика функции $y = 2x$ построить график функции $y = 2x - 1$?

К § 3 «Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями»

74, 75. Выберите какой-либо пример из этих заданий. Найдите значение выражения дважды: сначала записанного в условии выражения, затем — предварительно упростив его. Вычисления выполняйте с помощью калькулятора либо специализированного математического пакета. Насколько сократилось количество действий после упрощения выражения? Можно ли после упрощения выполнить вычисления устно?

К § 4 «Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями»

138. Выполните это задание также с помощью калькулятора. Всегда ли получится «удобный» результат?

К § 5 «Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень»

160, 161. Выполните какие-либо примеры из этих заданий с помощью калькулятора.

К § 6 «Тождественные преобразования рациональных выражений»

194, 195. Докажите утверждение задачи № 194, выполнив вычисления с помощью калькулятора. Какой путь доказательства оказался нагляднее? Можно ли с помощью калькулятора доказать утверждение задачи № 195?

К § 7 «Равносильные уравнения. Рациональные уравнения»

222. Решите эту задачу с помощью калькулятора.

К § 8 «Степень с целым отрицательным показателем»

Существует ли в калькуляторе и в других программах, которыми вы пользуетесь для вычислений, способ представления числа в стандартном виде? Освойте этот инструмент.

262—264. Выполните какое-либо из этих заданий, создав таблицу в табличном редакторе. Используйте средства автоматической сортировки. Постройте на основании полученной таблицы диаграмму. Насколько наглядной она получилась?

266. Решите эту задачу с помощью калькулятора. Чем эта задача похожа на задачу № 222 и чем отличается от неё? Какие общие элементы решения вы использовали для обеих задач?

Постройте общий алгоритм для решения задач № 222 и 266. Предусмотрите возможность использования этого алгоритма для произвольного количества лет.

К § 9 «Свойства степени с целым показателем»

276. Вычислите значения какого-либо выражения из примеров 5—8 этого задания, выполняя действия с помощью калькулятора в том порядке, в котором они записаны в примере (без предварительного упрощения). Получен ли тот же результат, что и при решении примера на бумаге? Почему результаты могут различаться? Какой вывод из этого можно сделать?

307. Постройте искомую таблицу с помощью табличного редактора. Сделайте так, чтобы значения функции вычислялись автоматически.

К § 10 «Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график»

315, 316. Заполните искомую таблицу с помощью табличного редактора. Постройте с помощью средств табличного редактора график функции, которая является математической моделью задачи. Как надо усовершенствовать таблицу, чтобы график получился более точным?

К § 11 «Функция $y = x^2$ и её график»

357—360. Выберите какую-либо функцию из этих заданий и постройте её график двумя способами. Первый способ: определите, из каких геометрических фигур состоит этот график, и изобразите эти фигуры на координатной плоскости с помощью графического редактора. Второй способ: составьте таблицу, содержащую набор значений аргумента и соответствующих им значений функции, и постройте график на основании этой таблицы с помощью соответствующих инструментов автоматического построения графиков; для этого способа выберите внешний вид графика, в котором заданные точки соединяются отрезками. Какой график более соответствует данной функции? Как надо учесть особенности этой функции при выборе набора аргументов для таблицы?

К § 12 «Квадратные корни. Арифметический квадратный корень»

Научитесь извлекать квадратный корень с помощью калькулятора и других программ, которыми вы пользуетесь для вычислений.

398. Выполните задание двумя способами: 1) упростив выражение на бумаге; 2) вычислив его значение с помощью калькулятора без предварительного упрощения. Сделайте выводы.

425. Запишите алгоритм для решения этой задачи методом перебора.

К § 14 «Подмножество. Операции над множествами»

Задайте какое-либо сочетание слов и выполните поиск в Интернете по этому сочетанию. Выполните поиск по каждому слову из этого сочетания отдельно. Заметьте количество выбранных результатов. Опишите характеристические свойства множеств, полученных в результате каждого поиска. Опишите в терминах операций над множествами, как соотносятся между собой результаты поиска в каждом из случаев. Сделайте выводы, насколько важно точно задавать условие поиска.

К § 15 «Числовые множества»

Для каждого из числовых множеств введите в калькуляторе несколько элементов этого множества. Любое ли рациональное число вы можете ввести? Можно ли ввести иррациональное число? Насколько точно представляет калькулятор эти числа? Сделайте вывод.

Как в калькуляторе можно задать число π?

475, 476. Выполните задание с помощью калькулятора и/или других программ, которыми вы пользуетесь для вычислений.

К § 16 «Свойства арифметического квадратного корня»

508. Выполните вычисления примера 6 с помощью калькулятора, не упрощая предварительно выражение. Какой способ решения оказался проще — на бумаге или с помощью калькулятора?

520. Выполните вычисления с помощью калькулятора, не упрощая предварительно выражение. Какой способ решения оказался проще — на бумаге или с помощью калькулятора?

К § 17 «Тождественные преобразования выражений, содержащих арифметические квадратные корни»

Вычислите значения выражений, приведённых в примерах 540, 541, 554 (2—4), с помощью калькулятора без предварительного упрощения выражений. Будет ли получен точный результат?

К § 18 «Функция $y = \sqrt{x}$ и её график»

С помощью табличного редактора постройте таблицу, содержащую набор значений аргумента и соответствующих им значений функции $y = \sqrt{x}$. Постройте график на основании этой таблицы.

К § 19 «Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений»

Запишите алгоритм для решения неполных квадратных уравнений в зависимости от их вида.

654. Запишите алгоритм для решения этой задачи методом перебора.

К § 20 «Формула корней квадратного уравнения»

Запишите алгоритм, который по коэффициентам a, b и c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находит его корни.

668, 669. Запишите алгоритмы для решения этих задач методом перебора. Какая информация в условиях этих задач позволяет сделать вывод, что можно применить метод перебора, в отличие от задач № 678 и 679?

К § 21 «Теорема Виета»

Придумайте два числа, десятичная запись каждого из которых содержит несколько цифр до и после запятой. Используя следствие из теоремы, обратной теореме Виета, составьте квадратное уравнение, для которого данные числа являются корнями. Для вычислений используйте калькулятор.

К § 22 «Квадратный трёхчлен»

Запишите алгоритм для разложения квадратного трёхчлена на линейные множители.

771. Создайте математическую модель для решения этой задачи в общем виде.

774. Запишите алгоритм для решения этой задачи методом перебора.

К § 23 «Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям»

Запишите алгоритм для решения биквадратных уравнений. Можно использовать в качестве подпрограммы алгоритм, составленный вами для решения квадратного уравнения (см. задание к § 20).

К § 24 «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций»

Можно ли для различных задач из этого параграфа создать одну и ту же математическую модель? Попробуйте найти такие задачи и составить общий алгоритм для их решения.

Ответы и указания к упражнениям

50. 0,3. **51.** 5. **53.** $\frac{1}{32}$. **54.** Нет. *Указание.* Представьте данную дробь в виде $\frac{(a-1)^2}{a^2+1}$. **58.** 1) x — любое число, кроме –1; 2) корней нет; 3) корней нет. **59.** 1) Корней нет; 2) –7. **60.** 1) Если $a = 0$, то корней нет; если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; 2) если $a = 0$, то x — любое число; если $a \neq 0$, то $x = 1$; 3) если $a = 6$, то x — любое число; если $a \neq 6$, то $x = a - 6$; 4) если $a = -2$, то корней нет; если $a = 2$, то x — любое число; если $a \neq -2$ и $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{a+2}$. **61.** 1) Если $a = -3$, то корней нет; если $a \neq -3$, то $x = \frac{3}{a+3}$; 2) если $a = 0$, то корней нет; если $a = 9$, то x — любое число; если $a \neq 0$ и $a \neq 9$, то $x = \frac{a-9}{a}$. **64.** –4 при $a = 2b$. **65.** 48 км/ч, 60 км/ч. **76.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{m+2}$; 3) $\frac{1}{1-k}$. **77.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{a-5}{a+5}$. **78.** 1) $\frac{1}{1-a}$; 2) $\frac{3}{b-2}$; 3) $\frac{m}{n-5}$. **79.** 1) $\frac{1}{(x-7)^2}$; 2) $\frac{y+6}{y+2}$. **87.** 2) 5; 3) $4\frac{1}{4}$. **88.** 2) –3; 3) –4,5. **89.** 1) 1; 2; 3; 6; 2) 1; 2; 7; 14; 3) 1; 2; 8. **90.** 1) 1; 3; 9; 2) 1; 2; 4; 8; 3) 2. **91.** 15 км/ч, 12 км/ч. **92.** 1) –2; 2) корней нет. **112.** 6) $\frac{5}{p-5}$; 7) $\frac{16}{16y-y^3}$; 8) $\frac{2b+1}{12b-6}$. **113.** 5) $\frac{1}{x}$; 6) $\frac{8}{y+2}$. **116.** 2) 4. **117.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2,5; 3) 0,1. **118.** 1) 1,2; 2) $\frac{7}{17}$. **121.** 2) $\frac{3}{b^2-3b+9}$. **122.** 1) $\frac{2n^3}{9m^2-n^2}$; 2) $\frac{2-2b}{8b^3+1}$. **124.** 1) $-\frac{a+b}{ab}$; 2) $\frac{1}{2x}$; 3) $\frac{100b^2}{(a^2-25b^2)^2}$; 4) $\frac{1}{y-2}$. **128.** $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$. *Указание.* Представьте каждое из слагаемых в виде разности двух дробей. Например, $\frac{1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1}$. **129.** $\frac{3}{(a-7)(a-1)}$. **132.** *Указание.* К каждой из дробей, записанных в левой части равенства, прибавьте 1, а к правой части прибавьте 3. **135.** 270 км. **160.** 1) –5; 2) 0,9; 3) –5; 4) –3,2. **161.** 1) $\frac{40}{21}$; 2) $\frac{4}{11}$. **162.** 83. **163.** 10. **164.** 7 или –7. **165.** 2 или –2. **166.** 1) 1; 2) 1. **167.** 1) $\frac{(a-5)^2}{(a+5)^2}$; 2) 1. **170.** 1) 0,5; 2) x — любое число. **172.** 1,2 ч. **173.** 50 л, 30 л. **174.** 5 мужчин, 1 женщина, 6 детей. **178.** 1) $\frac{3}{1-a}$;

2) $\frac{2}{b-3}$; 3) $\frac{12}{3c-1}$; 4) $\frac{1}{a-2b}$; 5) $\frac{2}{a+5}$; 6) $\frac{x-3}{x+3}$. **179.** 1) $\frac{2}{3-b}$; 2) -1; 3) $x+y$; 4) $\frac{a+2}{a-2}$. **180.** 1) $\frac{x+8}{x-8}$; 2) $\frac{a-4}{2a}$; 3) $\frac{1}{b}$; 4) $\frac{a-1}{a}$; 5) 2; 6) $a-2$. **181.** 1) $\frac{7+x}{7-x}$; 2) $c-5$; 3) -2; 4) $\frac{y+2}{6}$. **184.** 1) Не зависит; 2) зависит. **186.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $a-3$; 3) $a+1$; 4) $\frac{a+b}{a}$. **187.** 1) $\frac{a^2+b^2}{b^2}$; 2) $-a$. **188.** 1) $-\frac{a+b}{2ab}$; 2) $\frac{1}{a}$. **189.** $-y$. **192.** 1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) 1. **193.** 1) $-1\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$. **195.** *Указание*. Представьте данное выражение в виде $10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n$. **196.** 480 кг. **197.** 440 р., 950 р. **198.** 2 ч. **199.** 90 деталей. **200.** 9 воробьёв, 10 голубей, 11 горлиц. **207.** 2) Корней нет; 3) -2; 4) x — любое число, кроме 2; 5) x — любое число; 6) 3; 7) 0,5; 8) корней нет; 9) $-\frac{1}{3}$; 10) 17; 11) 12; 12) $1\frac{3}{4}$; 13) -4; 4; 14) 0; 15) 4. **208.** 1) -1; 2) корней нет; 3) 10; 4) корней нет; 5) 4; 6) x — любое число, кроме 0; 7) 6; 8) x — любое число, кроме $-0{,}5$; 9) -3; 3. **209.** 7. **210.** 10. **212.** 1) $\frac{13}{4}$; 2) корней нет; 3) 7; 4) 0; -2; 5) корней нет; 6) -17; 7) 0; 8) корней нет. **213.** 1) 10; 2) $-0{,}5$; 3) -3; 4) -4; 4; 5) корней нет; 6) -5. **214.** 2 км/ч. **215.** 29 км/ч. **216.** 9 км/ч. **217.** 1) Корней нет; 2) 9; 3) 0. **218.** 1) 0,6; 2) 0. **219.** 1) Если $a \neq 1$, то $x = 1$; если $a = 1$, то корней нет; 2) если $a \neq -5$, то $x = a$; если $a = -5$, то корней нет; 3) если $a = 0$, то x — любое число, кроме 3; если $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то $x = a$; если $a = 3$, то корней нет; 4) если $a \neq 7$, то $x = a$ или $x = 6$; если $a = 7$, то $x = 6$; 5) если $a \neq 4$ и $a \neq -2$, то $x = 4$ или $x = -2$; если $a = 4$, то $x = -2$; если $a = -2$, то $x = 4$; 6) если $a \neq 4$ и $a \neq -2$, то $x = a$; если $a = 4$ или $a = -2$, то корней нет. **220.** $a = 2$ или $a = -2$. **221.** $a = -9$, или $a = -3$, или $a = 0$. **222.** 70 000 жителей. **223.** 60 км. **251.** 1) 2,7; 2) $9\frac{47}{125}$. **258.** 5. **259.** 6. **265.** 31 болванка. **266.** 80 000 жителей. **267.** 2 км. **280.** 6) $-\frac{1}{6}$; 7) $\frac{4}{9}$; 8) $\frac{4}{7}$. **281.** 5) 16; 6) 144. **291.** 1) -3; 2) -5; 3) -2; 4) -7; 5) 0; 6) 2. **292.** 1) 4; 2) 1; 3) -1; 4) 6. **295.** 8 мин. **296.** 5,34 кг. **297.** В 81 раз. **298.** 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-4b^2$; 3) $15c^3 + 5$; 4) $-\frac{1}{m^4}$. **299.** 1) $\frac{2a^2}{3a^2-1}$; 2) $\frac{1-6b}{2}$. **300.** 1) -1 или 0; 2) 3 или 4; 3) 4 или 5; 4) 2 или 3. **301.** 1) 6 или 7; 2) 4 или 5; 3) 4 или 5; 4) 4 или 5. **302.** 28; 8. **303.** На 31,6 %. **304.** 5 ч 45 мин. **305.** Да, надо пять монет по 5 р. и три монеты по 2 р. **331.** 1) 2; 2) -1; 3; 3) корней нет. **332.** 1) 2; 4; 2) -1; 1; 3) корней нет. **345.** Корней нет. **346.** Уменьшилась на 9 %. **347.** 36 монет, 24 монеты. **348.** 12 км/ч. **353.** 1) Корней нет; 2) -1; 3; 3) 2. **354.** 1) -3; -1;

2) корней нет; 3) –1. **369.** 4. **371.** 5 км/ч, 3 км/ч. **397.** 1) –10; 2) 25; 3) –23,8; 4) 13; 5) 216; 6) –20. **398.** 1) 13,4; 2) 21; 3) –20. **399.** 2) $x \leqslant 0$; 3) x — любое число; 4) $x = 0$; 5) $x \geqslant 8$; 6) $x \leqslant 8$; 9) x — любое число, отличное от 8; 10) $x \geqslant 0$ и $x \neq 9$; 11) $x \geqslant 0$; 12) $x = 0$; 13) такого значения x не существует; 14) x — любое число; 15) $x = 0$; 16) x — любое число, отличное от 0. **400.** 2) $y \leqslant 0$; 3) $y \geqslant 0$; 4) $y \leqslant 0$; 5) $y = 0$; 6) $y > 0$; 7) $y \geqslant 0$ и $y \neq 1$. **401.** 6) –10; 10. **402.** 4) –7; 7. **405.** 1) 167; 2) 2116; 3) корней нет. **406.** 1) 4900; 2) корней нет. **407.** 1) Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то a и b — числа одного знака; если $a = 0$, то b — любое число; если $b = 0$, то a — любое число; 3) если $b \neq 0$, то $a \geqslant 0$; если $b = 0$, то a — любое число; 5) если $a \neq 0$, то $b \leqslant 0$; если $a = 0$, то b — любое число. **408.** 2) *Указание*. $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$. **409.** *Указание*. $-x^2 + 6x - 12 = -(x - 3)^2 - 3$. **410.** Выражение 2. **411.** 1) 0; 2) корней нет; 3) 1; 4) –2; 5) –1; 1; 6) 1. **412.** 1) 0; 2) корней нет; 3) 1; 4) 3. **413.** 1) $a > -1$; 2) $a = -1$; 3) $a < -1$. **416.** 1) Если $a = 0$, то $x \geqslant 1$; если $a \neq 0$, то $x = 1$; 2) если $a = 1$, то x — любое число; если $a \neq 1$, то $x = 0$; 3) если $a = 0$, то $x \geq 1$; если $a \neq 0$, то $x = 2$; 4) если $a < 0$, то корней нет; если $a \geqslant 0$, то $x = a^2 + 2$. **417.** $a < 0$ или $a = 1$. **418.** 13. **419.** $\frac{a+10}{5-a}$. **420.** 27 купюр по 100 р., 4 купюры по 500 р. **429.** 2) $\{-2, 2\}$; 4) $\varnothing$. **430.** 4) $\{5\}$. **434.** 1) $\frac{5b+15}{b}$; 2) $\frac{3}{1-b}$. **435.** 1,4 км/ч. **436.** $\frac{2}{7}$. **443.** 2) $\{4, 0, 7\}$. **453.** 2) $\varnothing$; 4) $\{2, 3, 5, 7\}$. **456.** 2) Множество всех натуральных чисел, кроме 1; 3) множество, состоящее из всех нечётных чисел и числа 2. **459.** 3) Достаточно; 4) необходимо. **461.** 96 деревьев. **462.** 1. **482.** *Указание*. Пусть $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ — данные рациональные числа. Тогда их сумма равна $\frac{mq+np}{nq}$, то есть является числом вида $\frac{s}{t}$, где $s \in Z$, $t \in N$. **483.** *Указание*. Если предположить, что данная сумма — число рациональное, то из этого следует, что данное иррациональное число можно представить в виде разности двух рациональных чисел. **484.** 1) Нет, например $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$; 2) нет, например $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$; 3) нет, например $\sqrt{3} \cdot 0 = 0$. **485.** В третьем подъезде на шестом этаже. **486.** $\frac{b^2}{a}$. **488.** 18 л. **518.** 1) Ни при каком значении x; 2) 3; 3) –1; 3. **519.** 1) –4; 2) 2. **520.** –4. **521.** 120 га. **550.** 1) $6\sqrt{2}$; 2) $11\sqrt{2}$; 3) $10\sqrt{3}$; 4) $9\sqrt{5a}$; 5) $-a\sqrt{ab}$; 6) 0. **551.** 1) $-6\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{7b}$; 3) $10a^3\sqrt{a}$. **553.** 1) $16 + \sqrt{3}$; 2) $-10\sqrt{5} - 5$; 3) 1; 4) 1; 5) 4. **554.** 1) $10 - 4\sqrt{2}$; 2) 74; 3) 4; 4) 32. **561.** 1) $\sqrt{a} - 2$; 2) $\frac{6}{m - 2\sqrt{m}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{xy}}$;

4) $\frac{4\sqrt{a}}{16-a}$; 5) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$; 7) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c}+5}$; 8) $\sqrt{a}-1$; 9) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 10) $\sqrt{x}$.

562. 1) $\frac{4}{a+\sqrt{a}}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{y}}$; 4) $\sqrt{\frac{n}{m}}$; 5) $\sqrt{x}$; 6) $\frac{22}{9-a}$. **563.** 1) $m^4\sqrt{-m}$; 2) $a^2b^6\sqrt{b}$; 3) $-2x^3\sqrt{y}$; 4) $m^3n^3\sqrt{mn}$; 5) $-3xy^7\sqrt{5x}$; 6) $8ab^4\sqrt{b}$; 7) $-11m^5b^9\sqrt{2m}$; 8) $mnp^7\sqrt{-p}$. **564.** 1) $-m^9\sqrt{-m}$; 2) $a^{11}b^{12}\sqrt{a}$; 3) $-7a\sqrt{b}$; 4) $a^4b^4\sqrt{ab}$; 5) $-3x^7y^{17}\sqrt{3x}$; 6) $-5m^3n^3p^3\sqrt{-2p}$. **565.** 2) Поскольку из условия следует, что $b \leqslant 0$, то $b\sqrt{-b} = -\sqrt{-b^3}$; 3) $\sqrt{c^7}$; 5) $-\sqrt{x^3y^5}$; 8) $\sqrt{a^3b^3}$. **566.** 2) $-\sqrt{54n^2}$; 3) $\sqrt{p^5}$; 6) $-\sqrt{-5a^9b}$. **568.** 1) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 2) $\sqrt{a}$. **569.** 1) $\sqrt{2}+1$; 2) $\sqrt{3}+2$; 3) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$. **570.** 1) $\sqrt{7}+1$; 2) $\sqrt{6}+3$; 3) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. **571.** 9. **574.** 1) $4+\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{3}+1$. **575.** 180 деталей. **576.** На 25 %. **577.** 6 км/ч, 2 км/ч. **578.** 17 вагонов. **596.** 1) 0; 1; 2) 0; 1; 3) корней нет; 4) 1; 5) 4; 6) 1. **598.** 4) $5-2\sqrt{3}$. **599.** 2) $-\sqrt{2}$. **600.** 0. *Указание.* Левая часть этого уравнения принимает только неотрицательные значения, а правая — только неположительные. **605.** 1) $\sqrt{7}-1$; 2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 3) $3-\sqrt{3}$; 4) $6-\sqrt{2}$. **606.** 1) $\sqrt{5}-2$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 3) $5-2\sqrt{3}$. **607.** Если $a \geqslant 0$, то один корень; если $a < 0$, то корней нет. **608.** $2\sqrt{a}+1$ при $a > 1$; 3 при $0 \leqslant a \leqslant 1$. **609.** 12 при $a > 36$; $2\sqrt{a}$ при $0 \leqslant a \leqslant 36$. **610.** 63 кг. **611.** 3 км/ч. **613.** 1 ч 12 мин. **630.** 6; 7. **631.** 9; 10. **633.** 1) 0; 14; 2) корней нет. **634.** 1) 0; $\frac{4}{3}$; 2) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. **640.** –3; –2 или 3; 4. **641.** –1; 0 или 0; 1. **642.** 1) 4; 2) 0; –8; 3) –9; 9. **647.** 1) 0; –3; 3; 2) 0; 1; 3) 1; 4) –2; 2. **648.** 1) 0; 7; –7; 2) 0; 5; –7; 3) –1,5; 1,5. **649.** 1) 2; 2) 3; 3) 0,5; –2; 4) такого значения не существует. **650.** 1) $a = 4$, $x_2 = -4$; 2) $a = 0$, $x_2 = 2$ или $a = -1$, $x_2 = \frac{9}{4}$; 3) $a = 3$, $x_2 = -2$. **654.** 35. **661.** 1) 1; $-\frac{7}{6}$; 2) 1; 9; 3) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$. **662.** 1) 2; $-\frac{7}{3}$; 2) –3; $\frac{1}{7}$. **663.** 1) 4; –3,5; 2) 1; $-\frac{1}{25}$; 3) 2; $\frac{4}{3}$; 4) $-3 \pm \sqrt{15}$; 5) 3; 6; 6) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$. **664.** 1) 3; 9; 2) $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$; 3) корней нет. **665.** 7. **666.** 38 см. **667.** 6 и 14 или –14 и –6. **668.** 10; 11. **669.** 13; 14. **670.** 1) $\sqrt{5}$; $\frac{-3\sqrt{5}}{2}$; 2) –1; $\sqrt{6}$; 3) 6; $-\frac{2}{3}$; 4) –1; $\frac{31}{22}$. **671.** 1) $-\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$; 2) 2; $\sqrt{3}$; 3) 1; $\frac{3}{8}$. **672.** –20; 4. **673.** 1; $-\frac{4}{3}$. **674.** 8 см. **675.** 6 см или 12 см. **676.** 16 см, 30 см. **677.** 9 см, 40 см.

678. 9; 11; 13. **679.** 4; 6; 8; 10. **681.** 16 обезьян или 48 обезьян. **682.** 9 команд. **683.** 15 сторон. **684.** 1) –8; –7; 0; 1; 2) –1; 1; 0,6; –0,6; 3) $-3+\sqrt{14}$; 4) –2; 2; 5) 3; 5; –3; –5; 6) 2; –2. **685.** 1) –12; 2; –2; –8; 2) 3; 3) 15; $-7 \pm \sqrt{34}$; 4) 9; –9. **686.** 1) –10; 2) 3. **687.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 3. **688.** 1) $b = -2$; 2) $b = -12$ или $b = 12$. **689.** 1) $b = 13{,}5$; 2) $b = -8$ или $b = 8$. **693.** 1) $x = -2a - 1$ или $x = -a$; 2) $x = 2a$ или $x = 4$; 3) если $a \neq 0$, то $x = \frac{25}{a}$ или $x = -\frac{1}{a}$; если $a = 0$, то корней нет; 4) если $a = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{3}$; если $a \neq \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{3}$ или $x = \frac{1}{2a-1}$. **694.** 1) $x = 3a - 5$ или $x = -a$; 2) $x = -3a$ или $x = 4$; 3) если $a = 0$, то $x = 1$; если $a \neq 0$, то $x = 1$ или $x = \frac{1}{a}$. **695.** 1) $b = 0$ или $b = -\frac{9}{7}$; 2) $b = -5$ или $b = 2\sqrt{6}$ или $b = -2\sqrt{6}$; 3) $b = 19$. **696.** 1) $b = 0$ или $b = -0{,}5$ или $b = 0{,}5$; 2) $b = -3$ или $b = -5$. **697.** $\frac{a-b}{a}$. **698.** 9. **699.** 4, $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$. **700.** 45 т, 75 т. **701.** 14 листов. **715.** $x_2 = 10$, $q = -20$. **716.** $x_2 = -6$, $p = -1$. **717.** $x_2 = 2$, $b = 14$. **718.** $x_2 = 1{,}6$, $m = -1{,}28$. **719.** –20,5. **720.** –7. **725.** $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $c = 9$. **726.** $x_1 = -14$, $x_2 = -6$, $a = 84$. **727.** $x_1 = 9$, $x_2 = -2$, $m = -18$. **728.** $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $n = -5$. **731.** 1) 1,5; 2) 69. *Указание.* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; 3) 57; 4) 567. **732.** 1) 80; 2) $-\frac{57}{16}$; 3) $\sqrt{89}$. *Указание.* $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$. **733.** $x^2 + 12x + 17 = 0$. **734.** $x^2 - 18x + 49 = 0$. **735.** $6x^2 - 14x + 3 = 0$. **736.** $x^2 - 15x + 8 = 0$. **737.** $a = 2$ или $a = -2$. **738.** $a = 6$ или $a = -6$. **740.** 1) 7; –7; 5; –5; 2) –11; 11; –1; 1; –4; 4. **741.** 1) –9; 9; –6; 6; 2) –17; 17; –7; 7; –3; 3. **742.** $b = c = 0$ или $b = 1$, $c = -2$. **743.** 1) $a = 2$; 2) такого значения a не существует. **744.** $a = 2$. **746.** 4 ряда по 12 деревьев. **748.** 18 %. **757.** 1) $\frac{2a-3}{a-6}$; 2) $\frac{b-3}{2b-1}$; 3) $\frac{c+1}{c-2}$; 4) $\frac{m^2+m+1}{m+10}$; 5) $-\frac{x+4}{x+8}$; 6) $\frac{1-4n}{5n+1}$. **758.** 1) $\frac{4x-3}{x-1}$; 2) $\frac{2y+5}{y-1}$; 3) $\frac{a+1}{a-5}$; 4) $\frac{3-b}{b-1}$. **759.** 1) –3; 2) –2; 3) $\frac{4}{3}$. **760.** 1) –4; 2) –14. **761.** 1) 1; 2) $\frac{2b+1}{b^2}$; 3) $-\frac{4}{c}$; 4) 4. **765.** 1) $(x-y)(x-5y)$; 2) $(a+9b)(a-4b)$; 3) $(3m+n)(m-3n)$; 4) $(4x-y)(x-y)$. **766.** 1) $(a-4b)(a-10b)$; 2) $(3b-2c)(4b+3c)$. **767.** 1) Если $a = 3$, то x — любое число; если $a = -2$, то корней нет; если $a \neq 3$ и $a \neq -2$, то $x = \frac{a+3}{a+2}$; 2) если $a = 7$, то x — любое число; если $a = 1$, то корней нет; если $a \neq 7$ и $a \neq 1$, то $x = \frac{2a+1}{a-1}$. **768.** Если $a = -8$, то x — любое число; если $a = 1$, то корней нет; если $a \neq -8$ и $a \neq 1$, то $x = \frac{a+8}{a-1}$. **771.** 6,8 %. **773.** 1) Корней нет; 2) –4; 3) 3; 4) y — любое действительное число, отличное от –4 и от 5. **777.** 1) –4; 1; 2) –1; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) –2; 10; 5) 7; 6) –6; 7) –5; 10; 8) 5; 9) 2; 8; 10) –2; 9; 11) –3; 2; 12) 4; –0,4. **778.** 1) –1; 2) –0,25; 3) 0,5; 6; 4) 8; 5) –3; 6) –3; 12; 7) –1; $\frac{2}{7}$; 8) –3; 13. **783.** 1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 6. **784.** 1) 10; 2) –7. **785.** 1) $3 \pm \sqrt{18}$; 2) –23; 1; 3) –27; –1; 4) 3. **786.** 1) 4; 9; 2) 5. **787.** 1) –1; 18; 2) –98; 2; 3) –1,5; 4) –2; 5) –3; 4; 6) –3; 7) 2; 8) 9; 9) 1; 10) 9. **788.** 1) –60; 50; 2) –3; 3) –9; 24; 4) 2; 5) –20; 2; 6) 15. **789.** 1) $-\frac{2}{3}$; 14; 2) –56; 60. **790.** 1) –15; 12; 2) –20; 2. **791.** 1) –5; 2) корней нет; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) 1. **792.** 1) –15; 1; 2) 1,5. **793.** 1) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; –3; 3; 2) –6; –4; –1; 1; 3) 0; 3; 4) –1; –3; 1. **794.** 1) $-\frac{1}{3}$; 1; 2) 0,5. **795.** 1) –1; 7; 2; 4; 2) –6; –2; $-4 \pm \sqrt{20}$; 3) –2; 1; 4) $-\frac{5}{3}$; 10. **796.** 1) Если $a = 1$, то $x = 7$; если $a = 7$, то $x = 1$; если $a \neq 1$ и $a \neq 7$, то $x = 1$ или $x = 7$; 2) если $a \neq 1$ и $a \neq 7$, то $x = a$; если $a = 1$ или $a = 7$, то корней нет; 3) если $a \neq 2$ и $a \neq \frac{2}{3}$, то $x = 3a$ или $x = 2$; если $a = 2$ или $a = \frac{2}{3}$, то $x = 2$; 4) если $a = 0$, то x — любое число, отличное от –3; если $a = -3$, то корней нет; если $a \neq 0$ и $a \neq -3$, то $x = a$. **797.** $a = 2\sqrt{5}$, или $a = -2\sqrt{5}$, или $a = 6$. **802.** 75 км/ч. **803.** 50 км/ч, 60 км/ч. **804.** 80 км/ч, 60 км/ч. **805.** 80 км/ч. **806.** 12 км/ч. **807.** 9 страниц. **808.** 30 м^3, 25 м^3. **809.** 6 дней. **810.** 31 км/ч. **811.** 10 км/ч. **812.** 3 км/ч. **813.** 2 км/ч или 2,25 км/ч. **814.** 60 км/ч, 40 км/ч. **815.** 60 км/ч. **816.** 60 км/ч. **817.** 8 км/ч. **818.** 32 км/ч. **819.** $\frac{1}{4}$. **820.** $\frac{7}{12}$. **821.** 45 дней, 36 дней. **822.** 15 ч, 10 ч. **823.** 21 ч, 24 ч. **824.** 80 г. **825.** 30 кг. **826.** 3 км/ч. **827.** 5 ч. **828.** 4 ч, 6 ч, 12 ч. **829.** 80 км/ч. **830.** 24 детали. **831.** 12 ч. **833.** 6. **848.** 3) $\frac{8}{3}$. **854.** 4) 1, 2, 3. **857.** $\frac{4}{a(a+12)}$. **858.** *Указание*. Рассмотрите разность левой и правой частей данного равенства. **911.** $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{2}}{3}$. **934.** 1) –5; 5; –1; 1; 2) –10; 10; –22; 22. **935.** $a = 1$. **936.** $a = 3$.

Ответы к заданиям «Проверьте себя» в тестовой форме

Задание № 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Б	В	А	А	Г	А	В	Г	В	Г	Б	В

Задание № 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Б	Г	Б	Г	А	А	В	Б	В	Б	В	А

Задание № 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
В	Г	В	Б	В	А	Б	Б	Г	А	А	Г

Задание № 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
В	Б	Б	В	В	А	В	Г	В	В	А	Б

Задание № 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
В	Г	Г	В	А	Б	А	Б	А	Г	Б	А

Задание № 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Г	В	А	Б	А	В	А	В	А	Г	Б	В

Алфавитно-предметный указатель

Оглавление

Квадраты и кубы натуральных чисел от 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Степени чисел 2 и 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049

Свойства степени с целым показателем

$$a^m a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0)$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ (b \neq 0)$$

Свойства арифметического квадратного корня

Если $a \geq 0$, то

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Для любого действительного a

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801